

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Izael do Nascimento

CATEGORIAS MODELO E RETIFICAÇÕES DE
AÇÕES HOMOTÓPICAS

Curitiba, 2017.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Izrael do Nascimento

CATEGORIAS MODELO E RETIFICAÇÕES DE
AÇÕES HOMOTÓPICAS

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo O. C. Hoefel

Coorientador: Prof.^a Dra. Muriel Livernet

Curitiba, 2017.

N244c

Nascimento, Izael do

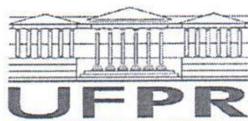
Categorias modelo e retificações de ações homotópicas / Izael do Nascimento. – Curitiba, 2017.
163 f. : il. color. ; 30 cm.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação
em Matemática, 2017.

Orientador: Eduardo O. C. Hoefel.
Coorientadora: Muriel Livernet.

1. Matemática. 2. Ações homotópicas. 3. Álgebra. I. Universidade Federal do Paraná.
II. Hoefel, Eduardo O. C. III. Livernet, Muriel. IV. Título.

CDD: 512



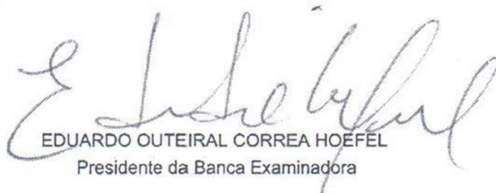
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA


ATA Nº017

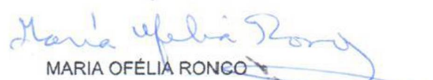
**ATA DE SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DOUTORADO PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA**

No dia onze de Dezembro de dois mil e dezessete às 09:00 horas, na sala Sala de videoconferência do departamento de informática, Sala de videoconferência do departamento de informática, foram instalados os trabalhos de arguição do doutorando **IZAEL DO NASCIMENTO** para a Defesa Pública de sua tese intitulada **CATEGORIAS MODELO E RETIFICAÇÕES DE AÇÕES HOMOTÓPICAS**. A Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná, foi constituída pelos seguintes Membros: **EDUARDO OUTEIRAL CORREA HOEFEL** (UFPR), **OLIVIER BRAHIC** (UFPR), **MARIA OFÉLIA RONCO** (UTALCA), **MARCELO MUNIZ SILVA ALVES** (UFPR), **ALEXANDRE QUESNEY** (USP). Dando início à sessão, a presidência passou a palavra ao discente, para que o mesmo expusesse seu trabalho aos presentes. Em seguida, a presidência passou a palavra a cada um dos Examinadores, para suas respectivas arguições. O aluno respondeu a cada um dos arguidores. A presidência retomou a palavra para suas considerações finais. A Banca Examinadora, então, reuniu-se e, após a discussão de suas avaliações, decidiu-se pela APROVAÇÃO do aluno. O doutorando foi convidado a ingressar novamente na sala, bem como os demais assistentes, após o que a presidência fez a leitura do Parecer da Banca Examinadora. A aprovação no rito de defesa deverá ser homologada pelo Colegiado do programa, mediante o atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca dentro dos prazos regimentais do programa. A outorga do título de doutor está condicionada ao atendimento de todos os requisitos e prazos determinados no regimento do Programa de Pós-Graduação. Nada mais havendo a tratar a presidência deu por encerrada a sessão, da qual eu, **EDUARDO OUTEIRAL CORREA HOEFEL**, lavrei a presente ata, que vai assinada por mim e pelos membros da Comissão Examinadora.

Curitiba, 11 de Dezembro de 2017.


EDUARDO OUTEIRAL CORREA HOEFEL
Presidente da Banca Examinadora


OLIVIER BRAHIC
Avaliador Interno


MARIA OFÉLIA RONCO
Avaliador Externo


MARCELO MUNIZ SILVA ALVES
Avaliador Interno


ALEXANDRE QUESNEY
Avaliador Externo



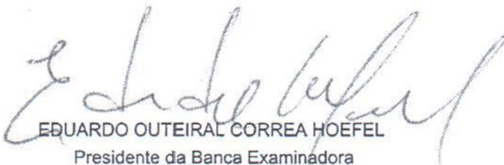
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **IZAEL DO NASCIMENTO** intitulada: **CATEGORIAS MODELO E RETIFICAÇÕES DE AÇÕES HOMOTÓPICAS**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 11 de Dezembro de 2017.


EDUARDO OUTEIRAL CORREA HOEFEL
Presidente da Banca Examinadora



OLIVIER BRAHIC
Avaliador Interno



MARIA OFÉLIA RONCO
Avaliador Externo



MARCELO MUNIZ SILVA ALVES
Avaliador Interno



ALEXANDRE QUESNEY
Avaliador Externo

Dedicato alla mia eterna principessa, Talita Paola.

Agradecimentos

A Deus por todas as condições favoráveis à realização deste trabalho.

À minha esposa, Talita Paola, à quem dedico este trabalho, por todo o amor e compreensão.

Aos meus pais Rosângela e Carlos Antônio, que mesmo nas dificuldades asseguraram um cenário propício à minha formação acadêmica.

Aos vários parentes e amigos que me deram algum tipo de suporte durante toda a carreira acadêmica.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Eduardo Outeiral Correa Hoefel, pela parceria, pelas boas ideias e pela educação e serenidade com que resolve problemas e trata pessoas.

À minha coorientadora, Prof.^a Dra. Muriel Livernet, pela acessibilidade e pelo comprometimento com o trabalho.

Ao meu professor de matemática do ensino médio, Prof. Dr. João do Carmo Lopes Gonçalves, o primeiro e decisivo incentivador do meu trabalho na área matemática, 13 anos atrás.

Ao meu orientador de iniciação científica na UEPG, Prof. Dr. Luis Antonio Romero Grados, pela parceria e pelo incentivo.

À minha orientadora de mestrado, Prof.^a Dra. Soraya Rosana Torres Kudri, pela parceria e pelo incentivo.

À memória de meu irmão e meu avô, entusiastas da minha formação.

Aos alunos do PPGM/UFPR que me ajudaram de alguma forma.

Ao PPGM/UFPR pela estrutura de qualidade e pelo comprometimento e competência de seus professores e coordenadores.

Ao programa CAPES/COFECUB pela oportunidade de estágio em Paris e pelo suporte financeiro.

À *Maison du Brésil* pela hospedagem e ao IMJ-PRG/*Université Paris Diderot* pelo acolhimento durante o período de estágio.

À UEPG, pela formação inicial e à Fundação Araucária pelo suporte financeiro naquela época.

À CAPES, pelo suporte financeiro e à UFPR, pela oportunidade.

“Vinde a mim, todos os que estais cansados e oprimidos, e eu vos aliviarei. Tomai sobre vós o meu jugo, e aprendei de mim, que sou manso e humilde de coração; e encontrareis descanso para as vossas almas. Porque o meu jugo é suave, e o meu fardo é leve.”

Mateus 11:28-30

Resumo

Estudamos A_∞ -ações e ações homotópicas do ponto de vista da teoria de categorias modelo e então as comparamos com ações topológicas do ponto de vista da teoria de homotopia. Propomos também uma formalização do conceito de retificação de álgebras homotópicas sobre operadas e construímos duas retificações de ações homotópicas. Estas retificações são comparadas com a retificação de A_∞ -ações dada em [26]. Mostramos que ações homotópicas são fracamente homotopicamente equivalentes às ações topológicas de espaços de laços em espaços de laços relativos.

Palavras-chave: *Ações homotópicas, categorias modelo, retificações, operadas, álgebras.*

Abstract

We study A_∞ -actions and homotopy actions from the viewpoint of model category theory and so we compare them to topological actions from the viewpoint of homotopy theory. We also propose a formalization of the concept of rectification of homotopy algebras over operads and we construct two rectifications of homotopy actions. These rectifications are compared to the rectification of A_∞ -actions given in [26]. We show that homotopy actions are weakly homotopy equivalent to topological actions from loop spaces on relative loop spaces.

Keywords: *Homotopy actions, model categories, rectifications, operads, algebras.*

Índice

Introdução	11
1 Categorias Modelo	19
1.1 Retratos e levantamentos	19
1.2 Estruturas modelo	24
1.3 Exemplos de categorias modelo	25
1.4 Objetos cofibrantes e objetos fibrantes	30
1.5 Objetos cilindro e objetos caminho	31
1.6 Homotopia à esquerda e homotopia à direita	33
1.7 Homotopia e equivalência homotópica	42
1.8 A categoria homotópica de uma categoria modelo	45
1.9 Equivalências de Quillen	49
1.10 Categorias modelo cofibrantemente geradas	51
1.11 Categorias modelo monoidais	55
1.12 Categorias modelo próprias	55
2 Operadas e álgebras	57
2.1 Operadas e álgebras	57
2.2 Operadas coloridas e álgebras	64
2.3 (Co)limites e adjunções	66
2.4 A adjunção extensão-restrição	67
2.5 Teoria de homotopia para operadas e álgebras	68
3 Ações homotópicas	73
3.1 A_∞ -ações e h-ações	76
3.2 Ações via categorias modelo	84
3.3 A retificação de Berger-Moerdijk	89
3.4 A retificação de Boardman-Vogt	100
3.5 Comparando as retificações \mathcal{BM} e \mathcal{BV}	110
3.6 A retificação \mathcal{HLS}	111

3.7	Comparando \mathcal{BM} e \mathcal{BV} com \mathcal{HLS}	117
3.8	h-ações e espaços de laços relativos	120
A	Categorias	123
A.1	Categorias, funtores e transformações naturais	123
A.2	Coprodutos e produtos	129
A.3	Pushouts e pullbacks	131
A.4	Limites e colimites	132
A.5	Coequalizadores reflexivos	134
A.6	Funtores adjuntos	134
A.7	Categorias monoidais	136
B	Árvores	142
B.1	Árvores	142
B.2	Árvores coloridas	145
B.3	Árvores métricas	147
C	A construção de Boardman-Vogt	150
C.1	Operadas livres	150
C.2	Operadas topológicas	153
C.3	\mathbb{W} -construção	154
C.4	Um morfismo entre $\mathbb{W}\text{Act}$ e Act_∞	157
	Referências Bibliográficas	160

Introdução

Ações topológicas, isto é, ações de monoides topológicos em espaços topológicos são abundantes e naturais em Topologia e Geometria e estão relacionadas a importantes construções nessas áreas via espaços de órbitas. Ações topológicas incluem a importante classe de ações de grupos de Lie em variedades, bem como são ingredientes essenciais em fibrados principais.

O principal problema deste trabalho é estudar a estrutura algébrica de ações topológicas do ponto de vista homotópico em linguagem de categorias modelo. Para tal faremos uso da teoria de operadas, pois álgebras sobre operadas representam diversas estruturas algébricas usuais. Começamos discutindo uma motivação sobre o estudo de grupos e monoides topológicos com respeito a espaços de laços, o que implicou no estudo de estruturas algébricas cujas propriedades valem a menos de homotopia.

No que segue, espaços, monoides, grupos e fibrados são assumidos ser objetos topológicos. Do mesmo modo aplicações significam aplicações contínuas. Homotopias são pontuadas apenas quando mencionado explicitamente. Neste trabalho consideramos apenas operadas não simétricas. Finalmente, por um espaço conexo entenderemos um espaço conexo por caminhos.

A Topologia Algébrica ocupa-se do problema de classificar espaços a menos de homeomorfismo através de técnicas algébricas, e os principais métodos utilizados são dados pela computação de grupos de homotopia e de homologia (singular). Nesse sentido, espaços de laços recebem atenção especial, pois existem diversos métodos específicos de cômputo de grupos de homologia para essa classe de espaços (cada qual sob hipóteses adequadas): teoria de Morse (cf. [43]), sequência espectral de Serre (cf. [41]), produto reduzido de James (cf. [31]) e a construção cobar de Adams (cf. [1]), por exemplo. Temos também a importante relação $\pi_n(X) \cong \pi_{n-1}(\Omega(X))$ (cf. [12]).

Desde que espaços fracamente (homotopicamente) equivalentes possuem os mesmos grupos de homotopia e de homologia, segue da observação anterior que classificar espaços de laços a menos de equivalência homotópica fraca (e.h.f.) é um problema relevante em Topologia Algébrica.

Em 1954 Samelson (cf. [52]) mostrou que se G é um grupo tal que existe um

G-fibrado principal universal com espaço base B , então existe uma e.h.f. entre G e $\Omega(B)$. Em particular, grupos de Lie compactos são fracamente equivalentes a espaços de laços.

Em 1956 Milnor (cf. [42]) mostrou para qualquer grupo G existe um G-fibrado principal universal $p : EG \rightarrow BG$ e então, em particular, todo grupo é fracamente equivalente a um espaço de laços. O espaço classificante BG é definido como um espaço de órbitas do espaço esférico EG , que por sua vez é construído a partir de *joins* de cópias de G . Segue também do trabalho de Milnor o seguinte resultado: se X tem o tipo de homotopia de um CW complexo contável, isto é, com uma decomposição celular contável, então existe um grupo G_X com o tipo de homotopia de $\Omega(X)$.

Um espaço X equipado com uma multiplicação $m : X \times X \rightarrow X$ com unidade e é chamado de um H-espaço. Um clássico resultado de Adams (cf. [2]) diz que a esfera \mathbb{S}^n , com sua topologia usual, é um H-espaço se, e somente se, $n \in \{0, 1, 3, 7\}$. Dizemos que X é homotopicamente associativo se $m(m \times 1)$ e $m(1 \times m)$ são homotópicas. Dizemos que X tem uma inversa homotópica se existe uma aplicação $\sigma : (X, e) \rightarrow (X, e)$ tal que $m(1 \times \sigma)\Delta_X$ e $m(\sigma \times 1)\Delta_X$ são homotópicas à aplicação constante em e . Nestes casos as homotopias devem ser pontuadas com respeito a e .

Em 1957 Sugawara (cf. [60]) considera o problema de caracterizar H-espaços homotopicamente associativos possuindo uma inversa homotópica. Uma das conclusões deste trabalho é que tais espaços, com algumas hipóteses a mais, são fracamente equivalentes a espaços de laços. As construções de Sugawara lembram as construções de Milnor de EG e BG e essa observação junto às propriedades algébricas válidas a menos de homotopia é o ponto de partida da investigação de Stasheff sobre o assunto, conforme voltaremos a falar adiante.

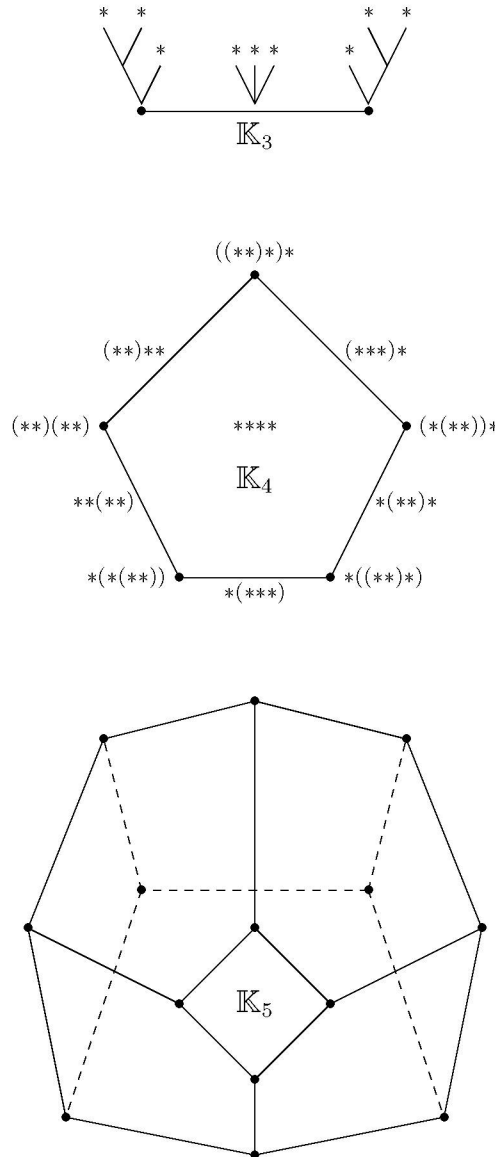
Em 1958 Dold e Lashof (cf. [13]) introduzem quasifibrações principais universais sobre monoides e generalizam o resultado de Milnor dado para G-fibrados. Uma das consequências desse trabalho é que para qualquer monoide *grouplike* M , existe uma e.h.f. entre M e $\Omega(BM)$, onde BM é construído similarmente ao espaço classificante de um grupo. Um espaço X com uma multiplicação m é dito ser *grouplike* se m induz uma estrutura de grupo em $\pi_0(X)$. H-espaços (e portanto monoides) conexos são *grouplike* (cf. [13]), logo esta condição é pouco restritiva.

A construção de Dold e Lashof foi modificada por Fuchs (cf. [20]) em 1971 com respeito a fibrações principais sobre H-espaços. Uma consequência deste trabalho é que se M é um monoide *grouplike* com uma inversa homotópica então M é homotopicamente equivalente a um espaço de laços.

O passo decisivo para se compreender as construções de espaços classificantes e suas implicações dos trabalhos anteriores foi dado por Stasheff (cf. [55]) em 1961, que em sua tese de doutoramento investiga quais são as propriedades essenciais envolvidas em tais

construções. Stasheff, apoiado principalmente nos trabalhos de Dold e Lashof (cf. [13]) e de Sugawara (cf. [60]), conclui que essas construções de espaços classificantes funcionam bem para H-espços que cumprem a propriedade associativa generalizada a menos de homotopia, isto é, quaisquer duas formas de se multiplicar n elementos deve ser ligada por uma homotopia e o conjunto de homotopias resultante deve ser coerente em certo sentido.

Desse modo Stasheff introduz o conceito de A_∞ -espaço, o qual é um H-espaço X junto com aplicações $(\mu_n : \mathbb{K}_n \times X^n \rightarrow X)_{n \geq 3}$ que cumprem certas propriedades. Os espaços \mathbb{K}_n são chamados de assoaciaedros ou politopos de Stasheff e para cada $n \geq 3$, \mathbb{K}_n é um CW complexo de dimensão $n - 2$ homeomorfo a $[0, 1]^{n-2}$ que codifica todas as formas de se associar n elementos, uma para cada 0-célula de \mathbb{K}_n . Assim \mathbb{K}_3 pode ser realizado como o intervalo $[0, 1]$ e \mathbb{K}_4 como uma região pentagonal do plano.



A aplicação μ_3 define uma homotopia entre os dois modos de se multiplicar 3 elementos. A aplicação μ_4 induz homotopias entre os 5 modos de se multiplicar 4 elementos e ela concorda com μ_3 no bordo do pentágono.

As células de \mathbb{K}_n podem ser descritas por árvores com n folhas. Em particular cada 0-célula corresponde a uma árvore binária e assim \mathbb{K}_n possui $\frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}$ 0-células (cf. [47]). A única $(n-2)$ -célula é representada pela n -corola.

Com respeito a espaços de laços o principal resultado do trabalho de Stasheff (cf. [56]) é o seguinte. Seja X um CW complexo conexo. Então X é um A_∞ -espaço se, e somente se, X tem o tipo de homotopia de um espaço de laços. Nesse caso o espaço classificante de X é dado por um quociente de $\coprod \mathbb{K}_{n+2} \times X^n$ cujas relações são determinadas pelas aplicações μ_n .

Do ponto de vista prático, os A_∞ -espaços de Stasheff podem ser pensados como monoides a menos de homotopia desde que espaços de laços são retratos por deformação de monoides (a saber os espaços de laços de Moore (cf. [26, 56])). Do ponto de vista conceitual, a unidade estrita da multiplicação de A_∞ -espaços sugere que estes objetos não são totalmente adequados para substituírem monoides em teoria de homotopia, em algum sentido. Em [8] Boardman e Vogt introduzem uma nova abordagem para estudar associatividade e comutatividade a menos de homotopia via linguagem de árvores. Nesse caso é possível conceber estruturas similares a de A_∞ -espaços onde a multiplicação tem uma unidade a menos de homotopia; chamaremos tais espaços de $W\mathcal{U}$ -espaços (cf. [8]). Trabalhando na categoria dos espaços compactamente gerados (cf. [8, 64]), Boardman e Vogt mostram que qualquer $W\mathcal{U}$ -espaço é um retrato por deformação forte de um monóide. $W\mathcal{U}$ -espaços formam o conceito adequado de monoides a menos de homotopia num sentido que especificaremos para ações topológicas.

A partir daí o problema de se estudar estruturas algébricas a menos de homotopia se difundiu e entre os principais desenvolvedores dessa área podemos citar Boardman e Vogt (cf. [7, 8]) e May (cf. [39]).

Em [7] Boardman e Vogt caracterizam espaços de laços infinitos estudando comutatividade a menos de homotopia via PROs e PROPs, ferramentas matemáticas definidas por Adams e MacLane (cf. [34]) que codificam diversas estruturas algébricas usuais.

Em [39] May dá continuidade ao estudo de espaços de laços infinitos introduzindo operadas, uma simplificação de PROPs que ainda codificam diversas estruturas algébricas importantes.

Em [8] Boardman e Vogt consideram o problema geral de se estudar estruturas algébricas homopicamente invariantes via teorias algébricas topológicas, objetos matemáticos ainda mais gerais que PROs e PROPs, contudo os principais resultados são dados para essas últimas.

Esses problemas topológicos possuem similares algébricos, como por exemplo as A_∞ -álgebras e as L_∞ -álgebras introduzidas por Stasheff (cf. [55, 56, 54]), que essencialmente são DG-álgebras associativas (respectivamente DG-álgebras de Lie) a menos de homotopia de cadeias. Podemos também falar em homotopia no contexto de conjuntos simplicais e investigar relações neste cenário que valem a menos de homotopia. Ficou claro então que uma linguagem formal, generalizadora e organizadora do conceito de homotopia era necessária no contexto categórico.

Em 1967 Quillen (cf. [49]) introduz categorias modelo. A definição de categoria modelo captura com êxito as principais similaridades entre teoria de homotopia e álgebra homológica, e assim desenvolve uma teoria de homotopia universal que pode ser aplicada em outros contextos em que alguma noção de homotopia seja relevante.

Uma estrutura modelo em uma categoria consiste de três classes distinguidas de morfismos chamados de equivalências fracas, fibrações e cofibrações que satisfazem certos axiomas que capturam propriedades essenciais da teoria de homotopia de espaços topológicos. Essa estrutura permite definir o conceito de homotopia entre flechas e por isso podemos estender a linguagem de classes de homotopia e equivalências homotópicas bem como falar em propriedades de levantamento e extensão de homotopias. Outra característica importante é a possibilidade de se construir a categoria homotópica de uma categoria modelo, deste modo temos um cenário propício e formal para falar em estruturas algébricas a menos de homotopia.

O estudo sistemático de propriedades homotópicas de operadas e suas álgebras é devido a Berger e Moerdijk (cf. [4, 6, 5]). Nessa série de trabalhos eles fornecem condições gerais para que a categoria de operadas sobre um cosmo \mathcal{V} admita uma estrutura modelo, bem como as categorias de álgebras sobre operadas. Eles também estendem a \mathbb{W} -contrução de Boardman e Vogt ([8]) de modo a fornecer resoluções cofibrantes explícitas para certas operadas. Dessa forma Berger e Moerdijk estabelecem uma teoria de homotopia para operadas e álgebras, o que em particular fornece um cenário propício e formal para se discutir genericamente conceitos como álgebras a menos de homotopia e estruturas algébricas homotopicamente invariantes.

Se \mathcal{P} é uma operada em \mathcal{V} , então Berger e Moerdijk definem uma \mathcal{P} -álgebra a menos de homotopia (ou uma \mathcal{P} -álgebra homotópica) como uma álgebra sobre uma resolução cofibrante de \mathcal{P} , conforme sugerido por Markl (cf. [37]), trabalhando no contexto particular de DG-operadas. Dada uma \mathcal{P} -álgebra homotópica A , é natural tentar associar a A uma \mathcal{P} -álgebra A' de modo que A e A' sejam próximas em algum sentido; isso conduz ao conceito de retificação de álgebras homotópicas e o exemplo clássico disso, como já vimos, é a retificação de um A_∞ -espaço em um espaço de laços (que é homotopicamente equivalente a um monoide), mesmo que A_∞ -espaços rigorosamente não sejam monoides

a menos de homotopia dentro da definição proposta acima, pois sua operada subjacente não é cofibrante (isso se deduz de nossa prova que a operada de A_∞ -ações também não é cofibrante). Por outro lado, os $W\mathcal{U}$ -espaços de Boardman e Vogt (cf. [8]) são monoides a menos de homotopia nesse sentido, pois a operada WAs é uma resolução cofibrante de As . Como já mencionamos, qualquer $W\mathcal{U}$ -espaço é hotopicamente equivalente a um monoide (cf. [8]), sua retificação.

O conceito de retificação de \mathcal{P} -álgebras homotópicas é mencionado na literatura sem formalização, contudo Berger e Moerdijk sugerem que uma retificação de uma \mathcal{P} -álgebra homotópica A seja uma \mathcal{P} -álgebra A' fracamente equivalente a A , porém desde que A e A' vivem em categorias modelo distintas, uma definição precisa de retificação se faz necessária.

Se considerarmos, por um momento, um A_∞ -espaço como um monoide a menos de homotopia, pois ele tem uma multiplicação (com unidade) em que a associatividade generalizada vale a menos de um sistema coerente de homotopias, é natural questionarmos o que seria uma ação topológica a menos de homotopia; a intuição sugere que deve ser um A_∞ -espaço X agindo, a menos de homotopia em algum sentido, em um espaço Y .

Em [48], Nowlan, um aluno de Stasheff, considera o problema de estudar quando fibrações são, a menos de homotopia, fibrações caminho e para isso define A_∞ -ações de um monoide no espaço total da fibração. Em [30], Iwase e Mimura introduzem e estudam A_∞ -ações de A_∞ -espaços em espaços.

Em [26], Hoefel, Livernet e Stasheff consideram A_∞ -ações e seu relacionamento com espaços de laços relativos, o que é natural desde que A_∞ -espaços são espaços de laços a menos de homotopia e espaços de laços agem naturalmente em espaços de laços relativos. Eles mostram que se (X, Y) é uma A_∞ -ação com X grouplike, então (X, Y) é fracamente homotopicamente equivalente a uma ação topológica dada por um espaço de laços de Moore agindo em um espaço de laços relativos $(\Omega_M(A), \Omega_M(A, B))$, que chamamos, para fácil referência, de retificação \mathcal{HLS} de (X, Y) .

Os autores de [26] observam que A_∞ -ações são álgebras sobre uma certa operada bicolorida, porém seus resultados não utilizam linguagem de operadas e categorias modelo. O presente trabalho surge, então, com o problema de se estudar A_∞ -ações via teoria de homotopia de operadas em linguagem de categorias modelo e verificar se os resultados de [26] poderiam ser simplificados ou extendidos em algum sentido. Uma resposta negativa é com respeito a obtenção da retificação \mathcal{HLS} via retificação de Berger-Moerdijk (cf. [4, 5]), pois as técnicas de categorias modelo são muito gerais e a retificação \mathcal{HLS} fornece um tipo muito especial de ação topológica, contudo obtemos resultados razoáveis de comparação das referidas retificações.

Desde que A_∞ -espaços são parte da informação de A_∞ -ações, estas compartilham sua

multiplicação com unidade estrita, o que, como já observamos com respeito a A_∞ -espaços, não define um conceito totalmente adequado de ação topológica a menos de homotopia. Para corrigir tal defeito nós introduzimos ações homotópicas, que serão chamadas apenas de h-ações por simplicidade, que essencialmente são $W\mathcal{U}$ -espaços agindo, a menos de homotopia, em espaços. Nós também mostramos que toda A_∞ -ação é naturalmente uma h-ação, o que é intuitivo porém não imediato. Dessa forma é natural questionar se h-ações também admitem uma retificação \mathcal{HLS} , e mostramos que sim. Propomos também uma formalização do conceito de retificação de álgebras homotópicas e construímos duas retificações de h-ações.

Este trabalho está organizado como segue.

No capítulo 1 desenvolvemos a teoria básica de categorias modelo. Definimos estruturas modelo, objeto e resolução cofibrante (fibrante), objeto cilindro (caminho), homotopia à esquerda e à direita, equivalência homotópica, a categoria homotópica de uma categoria modelo e adjunção e equivalência de Quillen. Também descrevemos brevemente categorias modelo cofibrantemente geradas, categorias modelo monoidais e categorias modelo próprias.

O primeira parte do capítulo 2 desenvolve a teoria básica de operadas. Definimos operadas e operadas coloridas e álgebras sobre estas, damos exemplos e discutimos algumas adjunções importantes entre as categorias correspondentes. A segunda parte do capítulo 2 desenvolve a teoria de homotopia de operadas e suas álgebras em linguagem de categorias modelo a ser aplicada no capítulo 3.

No capítulo 3 apresentamos os resultados deste trabalho. Nós mostramos que a categoria de álgebras sobre uma operada topológica qualquer admite uma estrutura modelo natural e formalizamos as categorias de ações topológicas, h-ações e A_∞ -ações como categorias de álgebras sobre operadas bicoloridas, o que nos permite estudar e comparar estes conceitos do ponto de vista homotópico de modo formal e preciso, via linguagem de categorias modelo. Mostramos que todas as categorias de ações consideradas são Quillen equivalentes, e portanto são homotopicamente indistintas. Nós também estudamos as operadas associadas a essas ações e mostramos, por exemplo, que a operada das A_∞ -ações não é cofibrante, o que nos conduz a uma discussão formal do porquê h-ações são mais adequadas que A_∞ -ações para representar ações topológicas do ponto de vista homotópico. Em seguida, apoiados em ideias de Berger e Moerdijk (cf. [4, 5]) nós sugerimos uma formalização do conceito de retificação de álgebras homotópicas e construímos duas retificações de h-ações; essas retificação são comparadas entre si e com a retificação \mathcal{HLS} . Na parte final do capítulo 3 nós mostramos que h-ações são fracamente homotopicamente equivalentes a pares do tipo $(\Omega(A), \Omega(A, B))$, o que estende o resultado de [26] dado para A_∞ -ações. Uma das aplicações deste resultado é, ao menos teoricamente, a computabi-

lidade de homologia de h -ações. Por exemplo, segue de um caso particular do trabalho [17] que a homologia de um espaço de laços relativos pode ser computada via construção cobar relativa.

No apêndice A apresentamos conceitos básicos de teoria de categorias a fim de estabelecer notação e terminologia. Em particular fazemos uma breve exposição de categorias monoidais, pois são necessárias para se definir operadas e categorias modelo monoidais, conceitos corriqueiros deste trabalho.

Os apêndices B e C são necessários para o entendimento do capítulo 3, a menos, é claro, que o leitor já conheça a linguagem de árvores planares com raiz e folhas e a \mathbb{W} -construção de [8]. No apêndice B descrevemos conceitos específicos sobre árvores a fim de definir operadas livres e a construção de Boardman-Vogt sobre operadas topológicas no apêndice C.

Capítulo 1

Categorias Modelo

Os conceitos que estruturam este trabalho são categorias modelo, operadas (e suas álgebras) e a construção de Boardman-Vogt para operadas topológicas.

Neste capítulo desenvolvemos a teoria básica de categorias modelo: uma categoria equipada com três classes distinguidas de morfismos onde se pode desenvolver uma linguagem de teoria de homotopia como uma abstração da noção clássica de homotopia para espaços topológicos e de homologia para complexos de cadeias.

Definiremos categorias modelo, objetos cilindro e objetos caminho a fim de introduzir os conceitos de homotopia à esquerda e à direita, homotopia e equivalência homotópica. Definiremos também objetos cofibrantes e fibrantes, resoluções cofibrantes e fibrantes, a categoria homotópica de uma categoria modelo e adjunções e equivalências de Quillen. Por fim apresentaremos brevemente categorias modelo cofibrantemente geradas, categorias modelo monoidais e categorias modelo próprias.

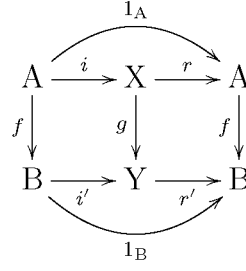
As referências básicas sobre categorias modelo neste trabalho são [15, 24, 28, 49].

Seja \mathcal{C} uma categoria. Então $|\mathcal{C}|$ denotará sua classe de objetos e $\vec{\mathcal{C}}$ denotará sua classe de flechas (ou morfismos). Se $A, B \in |\mathcal{C}|$, então $\mathcal{C}(A, B)$ denotará o conjunto de todas as flechas em \mathcal{C} com fonte A e alvo B . Neste trabalho \mathcal{C} e \mathcal{D} sempre denotarão categorias. Para mais detalhes, referimos o apêndice A.

1.1 Retratos e levantamentos

Nesta seção discutimos conceitos como retratos de flechas, levantamentos de diagramas e a propriedade 2-de-3 para uma classe de flechas a fim de definir categorias modelo adiante.

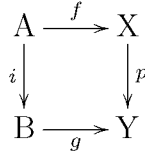
Definição 1.1.1. *Sejam $f, g \in \vec{\mathcal{C}}$. Dizemos que f é um retrato de g se existir um diagrama comutativo do tipo*



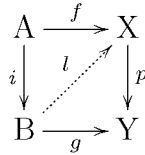
Isto é o mesmo que dizer que f é um retrato de g como objetos em $\text{Arr}(\mathcal{C})$, a categoria de flechas de \mathcal{C} .

Definição 1.1.2. Seja $L \subseteq \vec{\mathcal{C}}$. Dizemos que L é fechada por retratos se vale o seguinte: se $f \in \vec{\mathcal{C}}$, $g \in L$ e f é um retrato de g , então $f \in L$.

Definição 1.1.3. Dizemos que um quadrado comutativo



admite um levantamento se existir $l : B \rightarrow X \in \vec{\mathcal{C}}$ tal que o diagrama abaixo comuta.

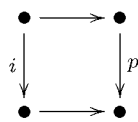


Neste caso dizemos que l é um levantamento do primeiro diagrama.

Definição 1.1.4. Sejam $i, p \in \vec{\mathcal{C}}$. Dizemos que i tem a propriedade de levantamento à esquerda (PLE) com respeito a p , ou, equivalentemente, que p tem a propriedade de levantamento à direita (PLD) com respeito a i , e neste caso escrevemos

$$i \dashv p,$$

se qualquer quadrado comutativo do tipo



admite um levantamento.

Definição 1.1.5. Seja $L \subseteq \vec{\mathcal{C}}$. Definimos as classes ${}^\dashv L$ e L^\dashv como segue.

(a) ${}^\dashv L := \{f \in \vec{\mathcal{C}}; f \dashv l \text{ para qualquer } l \in L\};$

(b) $L^\natural := \{g \in \vec{\mathcal{C}}; l \Vdash g \text{ para qualquer } l \in L\}$.

Definição 1.1.6. *Seja $L \subseteq \vec{\mathcal{C}}$. Dizemos que:*

(a) L é fechada por composições se para quaisquer $f, g \in L$ tais que gf está definida, tem-se que $gf \in L$;

(b) L é fechada por isomorfismos se para quaisquer $f, g \in \vec{\mathcal{C}}$ tais que $f \in L$ e g é isomorfa a f (como objetos em $\text{Arr}(\mathcal{C})$), tem-se que $g \in L$;

(c) L é fechada por pushouts se para qualquer $f \in L$ e para qualquer quadrado pushout do tipo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & A \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ B & \xrightarrow{f'} & P \end{array}$$

(d) L é fechada sob pullbacks se para qualquer $f \in L$ e para qualquer quadrado pullback do tipo

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g'} & A \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

O próximo resultado será usado para derivar importantes propriedades em categorias modelo.

Proposição 1.1.7. *Seja $L \subseteq \vec{\mathcal{C}}$. Então:*

(a) ${}^\natural L$ e L^\natural contêm todos os isomorfismos em \mathcal{C} ; em particular contêm todas as identidades em \mathcal{C} ;

(b) ${}^\natural L$ e L^\natural são fechadas por composições;

(c) ${}^\natural L$ e L^\natural são fechadas por retratos;

(d) ${}^\natural L$ e L^\natural são fechadas por isomorfismos;

(e) ${}^\natural L$ é fechada por pushouts e L^\natural é fechada por pullbacks.

Demonstração. Mostraremos os resultados para ${}^\natural L$, pois o caso L^\natural é similar ou dual (no item (e)).

(a) Sejam $\gamma : A \rightarrow B$ um isomorfismo em \mathcal{C} , $l : X \rightarrow Y \in L$ e um quadrado comutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \gamma \downarrow & & \downarrow l \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

É imediato verificar que $h := f\gamma^{-1}$ é um levantamento do quadrado acima. Portanto $\gamma \in {}^{\flat}\mathbf{L}$.

(b) Sejam $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C \in {}^{\flat}\mathbf{L}, l : X \rightarrow Y \in \mathbf{L}$ e um quadrado comutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r} & X \\ gf \downarrow & & \downarrow l \\ C & \xrightarrow{s} & Y \end{array}$$

Este quadrado induz o quadrado comutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r} & X \\ f \downarrow & & \downarrow l \\ B & \xrightarrow{sg} & Y \end{array}$$

Como $f \in {}^{\flat}\mathbf{L}$, existe $h : B \rightarrow X \in \vec{\mathcal{C}}$ tal que $hf = r$ e $lh = sg$. A última igualdade induz o quadrado comutativo

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{h} & X \\ g \downarrow & & \downarrow l \\ C & \xrightarrow{s} & Y \end{array}$$

Como $g \in {}^{\flat}\mathbf{L}$, existe $k : C \rightarrow X \in \vec{\mathcal{C}}$ tal que $kg = h$ e $lk = s$. Finalmente, $k(gf) = hf = r$, daí k é um levantamento do primeiro quadrado e $gf \in {}^{\flat}\mathbf{L}$.

(c) Sejam $g : X \rightarrow Y \in {}^{\flat}\mathbf{L}, f : A \rightarrow B$ um retrato de $g, l : W \rightarrow Z \in \mathbf{L}$ e um quadrado comutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{w} & W \\ f \downarrow & & \downarrow l \\ B & \xrightarrow{z} & Z \end{array}$$

Fixemos um diagrama comutativo como abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} & & 1_A & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ A & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{r} & A \\ f \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{j} & Y & \xrightarrow{s} & B \\ & \curvearrowleft & & \curvearrowright & \\ & & 1_B & & \end{array}$$

Os diagramas anteriores induzem o quadrado comutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{wr} & W \\ g \downarrow & & \downarrow l \\ Y & \xrightarrow{zs} & Z \end{array}$$

Como $g \in {}^{\mathfrak{h}}L$, existe $h : Y \rightarrow W \in \vec{\mathcal{C}}$ tal que $hg = wr$ e $lh = zs$. Definindo $k := hj : B \rightarrow W$, segue que $kf = hjf = hgi = wri = w1_A = w$ e $lk = lhj = zsj = z1_B = z$, daí k é levantamento do primeiro diagrama e então $f \in {}^{\mathfrak{h}}L$.

(d) Segue do fato que toda classe fechada por retratos também é fechada por isomorfismos, pois todo isomorfismo é uma retração.

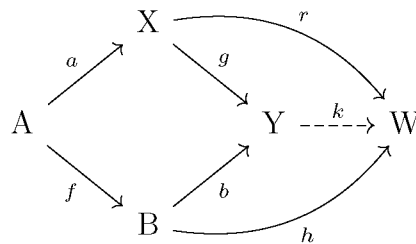
(e) Sejam $f : A \rightarrow B \in {}^{\mathfrak{h}}L$, $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & X \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$ um quadrado pushout, $l : W \rightarrow Z \in L$ e um quadrado comutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{r} & W \\ g \downarrow & & \downarrow l \\ Y & \xrightarrow{s} & Z \end{array}$$

Os dois diagramas anteriores induzem o quadrado comutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{ra} & W \\ f \downarrow & & \downarrow l \\ B & \xrightarrow{sb} & Z \end{array}$$

Desde que $f \in {}^{\mathfrak{h}}L$, existe $h : B \rightarrow W \in \vec{\mathcal{C}}$ tal que $hf = ra$ (1) e $lh = sb$ (2). De (1) segue da propriedade universal do pushout que existe $k : Y \rightarrow W \in \vec{\mathcal{C}}$ tal que $kg = r$ (3) e $kb = h$ (4)



```

    graph LR
      A -- a --> X
      A -- f --> B
      B -- b --> Y
      X -- g --> Y
      A -. lr .-> Y
      B -. sb .-> X
      Y -.- s -- lk --> Z
  
```

1

1.2 Estruturas modelo

(EM5) *para qualquer $f \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$:*

- (a) existem $i \in \mathcal{K}$ e $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ de modo que $f = pi$;
- (b) existem $j \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ e $q \in \mathcal{F}$ de modo que $f = qj$.

Definição 1.2.2. Uma categoria modelo é um par $(\mathcal{C}, (\mathcal{W}, \mathcal{K}, \mathcal{F}))$, onde $(\mathcal{W}, \mathcal{K}, \mathcal{F})$ é uma estrutura modelo em \mathcal{C} . As flechas em \mathcal{W} , \mathcal{K} , \mathcal{F} , $\mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ e $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ são chamadas, nesta ordem, de equivalências fracas, cofibrações, fibrações, cofibrações acíclicas e fibrações acíclicas.

Observação 1.2.3. Como praxe, ocasionalmente diremos apenas que \mathcal{C} é uma categoria modelo e consideraremos sua estrutura modelo subentendida.

Qualquer categoria bicompleta \mathcal{C} tem estruturas modelo triviais: basta definir uma das classes como a classe de isomorfismos em \mathcal{C} e as outras duas iguais a $\overrightarrow{\mathcal{C}}$.

A partir de agora \mathcal{M} denotará uma categoria modelo com estrutura modelo $(\mathcal{W}, \mathcal{K}, \mathcal{F})$.

A categoria dual \mathcal{M}^{op} de \mathcal{M} possui uma estrutura modelo $(\mathcal{W}^{op}, \mathcal{K}^{op}, \mathcal{F}^{op})$ definida como segue:

- $\mathcal{W}^{op} := \{f^{op} : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}^{op}}; f : B \rightarrow A \in \mathcal{W}\};$
- $\mathcal{K}^{op} := \{f^{op} : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}^{op}}; f : B \rightarrow A \in \mathcal{F}\};$
- $\mathcal{F}^{op} := \{f^{op} : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}^{op}}; f : B \rightarrow A \in \mathcal{K}\}.$

Pelo motivo acima todo argumento envolvendo cofibrações e colimites possui um argumento dual envolvendo fibrações e limites.

Seja I um conjunto não vazio e para cada $i \in I$ seja \mathcal{M}_i um categoria modelo com estrutura modelo $(\mathcal{W}_i, \mathcal{K}_i, \mathcal{F}_i)$. Então a categoria produto $\prod_I \mathcal{M}_i$ possui uma estrutura modelo $(\mathcal{W}_I, \mathcal{K}_I, \mathcal{F}_I)$ definida de maneira natural: $(f_i)_I$ é uma equivalência fraca se f_i for uma equivalência fraca em \mathcal{M}_i para cada $i \in I$. As cofibrações e as fibrações são definidas de modo análogo.

1.3 Exemplos de categorias modelo

Nesta seção apresentamos alguns exemplos de estruturas modelo em categorias usuais. No que segue R denota uma anel (associativo) comutativo com unidade.

Sejam \mathbf{Top} a categoria dos espaços topológicos, \mathbf{sSet} a categoria dos conjuntos simpliciais, \mathbf{Cat} a categoria das categorias pequenas, \mathbf{Ch}_R a categoria dos R -complexos de cadeias, \mathbf{Ch}_R^+ a categoria dos R -complexos de cadeias limitados inferiormente ($X_p = 0, p \leq 1$) e \mathbf{cCh}_R^+ a categoria dos R -complexos de cocadeias limitados inferiormente.

Exemplo 1.3.1. *Top possui duas estruturas modelo principais: a de Quillen $(\mathcal{W}_q, \mathcal{K}_q, \mathcal{F}_q)$ (cf. [15, 24, 28, 49]) e a de Hurewicz (ou de Strøm) $(\mathcal{W}_h, \mathcal{K}_h, \mathcal{F}_h)$ (cf. [59]), definidas como segue:*

- $\mathcal{W}_q := \{f \in \overrightarrow{\text{Top}}; f \text{ é uma equivalência homotópica fraca}\};$
- $\mathcal{F}_q := \{f \in \overrightarrow{\text{Top}}; f \text{ é uma fibração de Serre}\};$
- $\mathcal{K}_q := {}^{\text{fib}}(\mathcal{W}_q \cap \mathcal{F}_q);$
- $\mathcal{W}_h := \{f \in \overrightarrow{\text{Top}}; f \text{ é uma equivalência homotópica}\};$
- $\mathcal{F}_h := \{f \in \overrightarrow{\text{Top}}; f \text{ é uma fibração de Hurewicz}\};$
- $\mathcal{K}_h := \{f \in \overrightarrow{\text{Top}}; f \text{ é uma cofibração de Hurewicz fechada}\}.$

As flechas em \mathcal{K}_q serão chamadas de cofibrações de Quillen para fácil referência. As cofibrações de Quillen são caracterizadas como retratos de extensões celulares de inclusões de esferas em discos, conforme seção sobre categorias modelo cofibrantemente geradas adiante.

Top também tem uma estrutura modelo $(\mathcal{W}_m, \mathcal{K}_m, \mathcal{F}_m)$ (cf. [11]), chamada de mista ou de Cole, em que $\mathcal{W}_m := \mathcal{W}_q$ e $\mathcal{F}_m := \mathcal{F}_h$.

Um espaço topológico X é dito ser fracamente de Hausdorff se para qualquer aplicação contínua $f : C \rightarrow X$ definida em um espaço de Hausdorff compacto tem-se $f(C)$ é fechado em X .

Um espaço topológico X é dito ser compactamente gerado (ou um k -espaço) (cf. [8, 64]) se sua topologia é a topologia final com respeito à classe $\{f : C \rightarrow X \in \overrightarrow{\text{Top}}; C \text{ é um espaço de Hausdorff compacto}\}$. Esta definição não é equivalente à topologia de X ser coerente com sua família de subespaços compactos (cf. [57]). Estas duas definições são equivalentes para espaços topológicos fracamente de Hausdorff (cf. [58]).

A estrutura modelo de Quillen pode ser restrita (cf. [25]) às seguintes subcategorias (plenas) de Top: top (espaços topológicos compactamente gerados), WHtop (espaços topológicos fracamente de Hausdorff compactamente gerados) e Htop (espaços topológicos de Hausdorff compactamente gerados). Para condições gerais onde estruturas modelo podem ser restritas a subcategorias referimos [22].

Exemplo 1.3.2. *A estrutura modelo de Quillen (ou de Kan) $(s\mathcal{W}, s\mathcal{K}, s\mathcal{F})$ em sSet (cf. [24, 28, 49]) é definida como segue:*

- $s\mathcal{W} := \{f : A \rightarrow B \in s\text{Set}; a \text{ realização geométrica } |f| : |A| \rightarrow |B| \in \overrightarrow{\text{Top}} \text{ é uma equivalência homotópica fraca}\};$

- $s\mathcal{K} := \{f : A \rightarrow B \in \overrightarrow{s\text{Set}}; f_n \text{ é injetiva para todo } n \geq 0\};$
- $s\mathcal{F} := \{f \in \overrightarrow{\text{Top}}; f \text{ é uma fibração de Kan, isto é, } f \text{ possui a PLD com respeito às inclusões de chifres } \Lambda[n, k] \hookrightarrow \Delta[n], \text{ para quaisquer } n > 0 \text{ e } 0 \leq k \leq n\}.$

As categorias pontuadas Top_* e $s\text{Set}_*$ possuem estruturas modelo similares às acima.

Exemplo 1.3.3. A estrutura modelo canônica $(\mathcal{W}_{\text{Cat}}, \mathcal{K}_{\text{Cat}}, \mathcal{F}_{\text{Cat}})$ em Cat (cf. [32]) é definida como segue:

- $\mathcal{W}_{\text{Cat}} := \{F \in \overrightarrow{\text{Cat}}; F \text{ é uma equivalência de categorias}\};$
- $\mathcal{F}_{\text{Cat}} := \{F \in \overrightarrow{\text{Cat}}; F \text{ é uma isofibração}\};$
- $\mathcal{K}_{\text{Cat}} := \{F \in \overrightarrow{\text{Cat}}; F \text{ é uma isocofibração (um funtor injetivo nos objetos)}\}.$

Essa estrutura modelo é chamada de canônica porque ocorre algo peculiar: essa é a única estrutura modelo em Cat em que as equivalências fracas são as equivalências de categorias (assumindo-se o axioma da escolha).

A estrutura modelo canônica de Cat pode ser restrita à sua subcategoria plena dos grupoides (pequenos) Grpd (cf. [3]), chamada de estrutura modelo de Anderson em Grpd . Cat possui outra estrutura modelo, chamada de estrutura modelo de Thomason (cf. [62]), cujas equivalências fracas são relacionadas a ∞ -grupoides. Para mais detalhes referimos [61].

Exemplo 1.3.4. A estrutura modelo projetiva $(\mathcal{W}_{prj}, \mathcal{K}_{prj}, \mathcal{F}_{prj})$ em $\text{Ch}_{\mathbb{R}}$ (cf. [28]) é definida como segue:

- $\mathcal{W}_{prj} := \{f = (f_p) \in \overrightarrow{\text{Ch}_{\mathbb{R}}}; f \text{ é um quasi-isomorfismo}\};$
- $\mathcal{F}_{prj} := \{f = (f_p) \in \overrightarrow{\text{Ch}_{\mathbb{R}}}; f_p \text{ é um epimorfismo para todo } p \in \mathbb{Z}\};$
- $\mathcal{K}_{prj} := {}^{\flat}(\mathcal{F}_{prj} \cap \mathcal{W}_{prj}).$

Exemplo 1.3.5. A estrutura modelo projetiva $(\mathcal{W}_{prj}, \mathcal{K}_{prj}, \mathcal{F}_{prj})$ em $\text{Ch}_{\mathbb{R}}^+$ (cf. [15]) é definida como segue:

- $\mathcal{W}_{prj} := \{f = (f_p) \in \overrightarrow{\text{Ch}_{\mathbb{R}}^+}; f \text{ é um quasi-isomorfismo}\};$
- $\mathcal{F}_{prj} := \{f = (f_p) \in \overrightarrow{\text{Ch}_{\mathbb{R}}^+}; f_p \text{ é um epimorfismo para todo } p \geq 1\};$
- $\mathcal{K}_{prj} := \{f = (f_p) \in \overrightarrow{\text{Ch}_{\mathbb{R}}^+}; f_p \text{ é um monomorfismo e } \text{coker } f_p \text{ é um } \mathbb{R}\text{-módulo projetivo para todo } p \geq 0\}.$

Ch_R^+ também tem uma estrutura modelo em que as equivalências fracas são as equivalências homotópicas de cadeias (cf. [11]).

Exemplo 1.3.6. A estrutura modelo injetiva $(\mathcal{W}_{inj}, \mathcal{K}_{inj}, \mathcal{F}_{inj})$ em cCh_R^+ é definida como segue:

- $\mathcal{W}_{inj} := \{f = (f_p) \in \overrightarrow{\text{cCh}_R^+}; f \text{ é um quasi-isomorfismo}\};$
- $\mathcal{K}_{inj} := \{f = (f_p) \in \overrightarrow{\text{cCh}_R^+}; f_p \text{ é um monomorfismo para todo } p \geq 1\};$
- $\mathcal{F}_{inj} := \{f = (f_p) \in \overrightarrow{\text{cCh}_R^+}; f_p \text{ é um epimorfismo e } \ker f_p \text{ é um } R\text{-módulo injetivo para todo } p \geq 0\}.$

Esta estrutura modelo é obtida por dualização da estrutura modelo projetiva de Ch_R^+ .

O resultado abaixo, conhecido como o argumento do retrato na literatura, permite caracterizar as classes \mathcal{K} , $\mathcal{K} \cap \mathcal{W}$, \mathcal{F} e $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ via propriedades de levantamento, o que por sua vez revela diversas propriedades úteis de tais classes, como veremos nos corolários que seguirão.

Proposição 1.3.7 (O argumento do retrato). *Sejam $f, p, i \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ tais que $f = pi$.*

- (a) *Se $f \pitchfork p$, então f é um retrato de i ;*
- (b) *Se $i \pitchfork f$, então f é um retrato de p .*

Demonstração. Vamos mostrar o item (a), a prova do item (b) é similar.

Desde $f \pitchfork p$ e $f = pi$, segue que existe $l : B \rightarrow X$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ f \downarrow & \nearrow l & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{1_B} & B \end{array}$$

Desta forma o diagrama abaixo também comuta e então f é um retrato de i .

$$\begin{array}{ccccc} & & 1_A & & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ A & \xrightarrow{1_A} & A & \xrightarrow{1_A} & A \\ f \downarrow & & i \downarrow & & f \downarrow \\ B & \xrightarrow{\quad} & X & \xrightarrow{\quad} & B \\ & \nwarrow & & \searrow & \\ & & 1_B & & \end{array}$$

□

Proposição 1.3.8. *Seja $f \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$. Então:*

- (a) $f \in \mathcal{K}$ se, e somente se, $f \dashv g$ para qualquer $g \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$;
- (b) $f \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ se, e somente se, $f \dashv g$ para qualquer $g \in \mathcal{F}$;
- (c) $f \in \mathcal{F}$ se, e somente se, $g \dashv f$ para qualquer $g \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$;
- (d) $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ se, e somente se, $g \dashv f$ para qualquer $g \in \mathcal{K}$.

Demonstração. Vamos mostrar o item (c), pois as demais provas são similares. Uma implicação segue de (EM4)(b).

Suponhamos então que $g \dashv f$ para qualquer $g \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$. Por (EM5)(b), existem $i : A \rightarrow X \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ e $p : X \rightarrow B \in \mathcal{F}$ (para algum $X \in |\mathcal{M}|$) tais que $f = pi$.

Como $i \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$, segue da hipótese que $i \dashv f$. Finalmente segue do argumento do retrato que f é um retrato de p , e desde que $p \in \mathcal{F}$, o resultado segue de (EM3).

□

Corolário 1.3.9. $\mathcal{K}^\dashv = \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, $(\mathcal{K} \cap \mathcal{W})^\dashv = \mathcal{F}$, ${}^\dashv\mathcal{F} = \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ e ${}^\dashv(\mathcal{F} \cap \mathcal{W}) = \mathcal{K}$.

Corolário 1.3.10. *As classes \mathcal{W} , \mathcal{K} , $\mathcal{K} \cap \mathcal{W}$, \mathcal{F} e $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ contêm todos os isomorfismos em \mathcal{M} (e em particular todas as identidades em \mathcal{M}) e são fechadas por: composições, retratos e isomorfismos. As classes \mathcal{K} e $\mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ são fechadas por pushouts. As classes \mathcal{F} e $\mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ são fechadas por pullbacks.*

Demonstração. O resultado segue do corolário anterior e da Proposição 1.1.7, exceto para \mathcal{W} . \mathcal{W} contém todos os isomorfismos em \mathcal{M} porque $\mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ os contém. \mathcal{W} é fechada por composições e por retratos por definição ((EM2) e (EM3)). Finalmente, toda classe fechada por retratos também é fechada por isomorfismos. □

Corolário 1.3.11. *Em qualquer estrutura modelo $(\mathcal{W}, \mathcal{K}, \mathcal{F})$, quaisquer duas classes determinam a terceira no seguinte sentido:*

- (a) $\mathcal{K} = {}^\dashv(\mathcal{F} \cap \mathcal{W})$;
- (b) $\mathcal{F} = (\mathcal{K} \cap \mathcal{W})^\dashv$;
- (c) $f \in \mathcal{W}$ se, e somente se, existem $i \in {}^\dashv\mathcal{F}$ e $p \in \mathcal{K}^\dashv$ tais que $f = pi$.

Demonstração. Só precisamos verificar (c). Suponhamos que existem $i \in {}^\dashv\mathcal{F}$ e $p \in \mathcal{K}^\dashv$ tais que $f = pi$. Desde que ${}^\dashv\mathcal{F} = \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ e $\mathcal{K}^\dashv = \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, segue de (EM2) que $f \in \mathcal{W}$. Reciprocamente, suponhamos que $f \in \mathcal{W}$. Segue de (EM5)(a) que existem $i \in \mathcal{K}$ e $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ tais que $f = pi$. Segue de (EM2) que $i \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ e então $i \in {}^\dashv\mathcal{F}$ e $p \in \mathcal{K}^\dashv$. □

1.4 Objetos cofibrantes e objetos fibrantes

Nesta seção definimos os importantes conceitos de objetos cofibrantes e objetos fibrantes em uma categoria modelo. Muitos dos resultados importantes da teoria de categorias modelo estão relacionados a essas classes de objetos, o que ficará claro nos resultados e definições que virão.

Definição 1.4.1. *Seja $A \in |\mathcal{M}|$. Fixemos um objeto inicial 0 e um objeto final 1 em \mathcal{M} . Dizemos que A é um objeto:*

- (a) *cofibrante se $0 \rightarrow A \in \mathcal{K}$;*
- (b) *fibrante se $A \rightarrow 1 \in \mathcal{F}$;*
- (c) *bifibrante se for cofibrante e fibrante.*

É fácil verificar que a definição acima não depende dos objetos inicial e final dados. Seguem exemplos de objetos cofibrantes e objetos fibrantes em categorias modelo usuais. Os exemplos não referenciados seguem das definições das estruturas modelo por inspeção direta.

Exemplo 1.4.2.

- (a) *em $(\text{Top}, \mathcal{W}_h, \mathcal{K}_h, \mathcal{F}_h)$ todos os objetos são bifibrantes;*
- (b) *em $(\text{Top}, \mathcal{W}_q, \mathcal{K}_q, \mathcal{F}_q)$ todos os objetos são fibrantes, enquanto que a classe dos objetos cofibrantes contém os retratos de CW-complexos (cf. [24, 25, 29]);*
- (c) *em $(\text{Top}, \mathcal{W}_m, \mathcal{K}_m, \mathcal{F}_m)$ todos os objetos são fibrantes, enquanto que os objetos cofibrantes, chamados de espaços m -cofibrantes, são precisamente os espaços homotopicamente equivalentes a CW-complexos (cf. [11]);*
- (c) *em sSet (com a estrutura modelo de Quillen) todos os objetos são cofibrantes, enquanto que os objetos fibrantes são os complexos de Kan (cf. [24, 29]);*
- (d) *em Cat (com a estrutura modelo canônica) todos os objetos são bifibrantes;*
- (e) *em $(\text{Ch}_R, \mathcal{W}_{prj}, \mathcal{K}_{prj}, \mathcal{F}_{prj})$ todos os objetos são fibrantes;*
- (f) *em $(\text{Ch}_R^+, \mathcal{W}_{prj}, \mathcal{K}_{prj}, \mathcal{F}_{prj})$ todos os objetos são fibrantes, enquanto que os objetos cofibrantes são os complexos de cadeias formados por R -módulos projetivos;*
- (g) *em $(\text{cCh}_R^+, \mathcal{W}_{inj}, \mathcal{K}_{inj}, \mathcal{F}_{inj})$ todos os objetos são cofibrantes, enquanto que os objetos fibrantes são os complexos de cocadeias formados por R -módulos injetivos.*

1.5 Objetos cilindro e objetos caminho

Um objeto cilindro é uma abstração do cilindro $[0, 1] \times A$ de um espaços topológico A , usado para definir o conceito usual de homotopia entre aplicações contínuas. Dualmente, um objeto caminho é uma abstração do espaço de caminhos $B^{[0,1]}$ de um espaço topológico B , o qual também pode ser usado para definir o conceito usual de homotopia em \mathbf{Top} (cf. [12]). Seguem as definições e principais resultados destes conceitos.

Definição 1.5.1. *Seja $A \in |\mathcal{M}|$. Um objeto cilindro (para A) é uma quádrupla*

$$\tilde{A} := ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), \tilde{A}, i, p)$$

onde:

- (a) $(A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1)$ é um coproduto de A e A ;
- (b) $\tilde{A} \in |\mathcal{M}|$;
- (c) $i : A \amalg A \rightarrow \tilde{A} \in \vec{\mathcal{M}}$;
- (d) $p : \tilde{A} \rightarrow A \in \mathcal{W}$;

e $pi = 1_A \amalg 1_A$.

Definimos também $i_0 := i\alpha_0$ e $i_1 := i\alpha_1$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow[\alpha_1]{\alpha_0} & A \amalg A & \xrightarrow{1_A \amalg 1_A} & A \\ & \searrow i_0 & \searrow i & \nearrow p \in \mathcal{W} & \\ & & \tilde{A} & & \end{array}$$

Observação 1.5.2. *Consideremos a notação acima. Notemos que $pi_0 = 1_A = pi_1$.*

Definição 1.5.3. *Sejam $A \in |\mathcal{M}|$ e $\tilde{A} = ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), \tilde{A}, i, p)$ um objeto cilindro. Dizemos que \tilde{A} é um:*

- (a) *objeto cilindro bom se $i \in \mathcal{K}$;*
- (b) *objeto cilindro muito bom se $i \in \mathcal{K}$ e $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$.*

Observação 1.5.4. *Seja $A \in |\mathcal{M}|$. Então existe um objeto cilindro muito bom para A . De fato, basta aplicar (EM5)(a) em $1_A \amalg 1_A$.*

Lema 1.5.5. *Sejam $A \in |\mathcal{M}|$ e $\tilde{A} := ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), \tilde{A}, i, p)$ um objeto cilindro. Então $i_0, i_1 : A \rightarrow \tilde{A}$ são equivalência fracas.*

Demonstração. Segue diretamente de $pi_0 = 1_A = pi_1$ e de (EM2), pois $p \in \mathcal{W}$ e $1_A \in \mathcal{W}$. \square

Lema 1.5.6. *Sejam $A \in |\mathcal{M}|$ e $\tilde{A} := ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), \tilde{A}, i, p)$ um objeto cilindro. Se A é cofibrante e \tilde{A} é um objeto cilindro bom, então $i_0, i_1 : A \rightarrow \tilde{A}$ são cofibrações acíclicas.*

Demonstração. Basta verificarmos que i_0 é uma cofibração. O coproduto $(A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1)$ determina o quadrado pushout abaixo (para um objeto inicial $0 \in |\mathcal{C}|$)

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\in \mathcal{K}} & A \\ \downarrow & & \downarrow \alpha_1 \\ A & \xrightarrow{\alpha_0} & A \amalg A \end{array}$$

Desde que A é cofibrante e \mathcal{K} é fechada por pushouts segue que $\alpha_0 \in \mathcal{K}$. Como $i \in \mathcal{K}$ por hipótese e $i_0 = i\alpha_0$, obtemos $i_0 \in \mathcal{K}$ (composição de cofibrações). \square

Definição 1.5.7. *Seja $B \in |\mathcal{M}|$. Um objeto caminho (para B) é uma quádrupla*

$$\overline{B} := ((B \amalg B, \pi_0, \pi_1), \overline{B}, j, q)$$

onde:

- (a) $(B \amalg B, \pi_0, \pi_1)$ é um produto de B e B ;
- (b) $\overline{B} \in |\mathcal{M}|$;
- (c) $j : B \rightarrow \overline{B} \in \mathcal{W}$;
- (d) $q : \overline{B} \rightarrow B \amalg B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$;

e $qj = 1_B \amalg 1_B$.

Definimos também $q_0 := \pi_0 q$ e $q_1 := \pi_1 q$.

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{1_B \amalg 1_B} & B \amalg B & \xrightarrow[\pi_1]{\pi_0} & B \\ & \searrow j \in \mathcal{W} & \nearrow q & \nearrow q_0 & \nearrow \\ & \overline{B} & & & \end{array}$$

Observação 1.5.8. *Consideremos a notação acima. Notemos que $q_0 j = 1_B = q_1 j$.*

Definição 1.5.9. *Sejam $B \in |\mathcal{M}|$ e $\overline{B} = ((B \amalg B, \pi_0, \pi_1), \overline{B}, j, q)$ um objeto caminho. Dizemos que \overline{B} é um:*

- (a) objeto caminho bom se $q \in \mathcal{F}$;
- (b) objeto caminho muito bom se $j \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ e $q \in \mathcal{F}$.

Observação 1.5.10. Seja $B \in |\mathcal{M}|$. Então existe um objeto caminho muito bom para B . De fato, basta aplicar (EM5)(b) em $1_B \amalg 1_B$.

1.6 Homotopia à esquerda e homotopia à direita

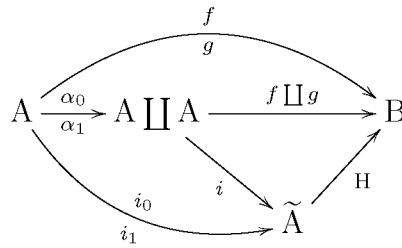
Nesta seção finalmente definimos o conceito de homotopia em categorias modelo. Devido a generalidade de uma categoria modelo, é necessário definir dois conceitos de homotopia: homotopia à esquerda e homotopia à direita. Veremos que sob certas hipóteses estes conceitos são equivalentes. Seguem as definições e os principais resultados destes conceitos.

Definição 1.6.1. Sejam $f, g : A \rightarrow B \in \vec{\mathcal{M}}$. Dizemos que f é homotópica a g à esquerda, e escrevemos $f \sim^e g$, se existirem um objeto cilindro $\tilde{A} = ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), \tilde{A}, i, p)$ e $H : \tilde{A} \rightarrow B \in \vec{\mathcal{M}}$ de modo que

$$Hi = f \amalg g,$$

ou, equivalentemente,

$$Hi_0 = f \text{ e } Hi_1 = g.$$



Neste caso dizemos que H é uma homotopia à esquerda entre f e g com respeito a \tilde{A} . Também dizemos que H é uma homotopia à esquerda boa ou muito boa se o objeto cilindro associado for bom ou muito bom, respectivamente.

Observação 1.6.2. Consideremos a notação acima. Se $f \sim^e g$, então $f \in \mathcal{W}$ se, e somente se, $g \in \mathcal{W}$.

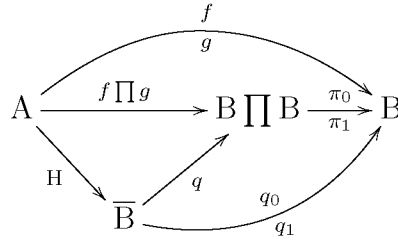
De fato, suponhamos que $f \in \mathcal{W}$ e lembremos que $i_0, i_1 \in \mathcal{W}$. Segue então de $Hi_0 = f$ e (EM2) que $H \in \mathcal{W}$. Agora segue de $Hi_1 = g$ e (EM2) que $g \in \mathcal{W}$. A recíproca é análoga.

Definição 1.6.3. *Sejam $f, g : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$. Dizemos que f é homotópica a g à direita, e escrevemos $f \sim^d g$, se existirem um objeto caminho $\overline{B} = ((B \amalg B, \pi_0, \pi_1), \overline{B}, j, q)$ e $H : A \rightarrow \overline{B} \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ de modo que*

$$qH = f \amalg g,$$

ou, equivalentemente,

$$q_0H = f \text{ e } q_1H = g.$$



Neste caso dizemos que H é uma homotopia à direita entre f e g com respeito a \overline{B} . Também dizemos que H é uma homotopia à direita boa ou muito boa se o objeto caminho associado for bom ou muito bom, respectivamente.

Observação 1.6.4. *Consideremos a notação acima. Como no caso de homotopia à esquerda, se mostra que se $f \sim^d g$, então $f \in \mathcal{W}$ se, e somente se, $g \in \mathcal{W}$.*

Duas aplicações contínuas homotópicas no sentido usual são homópicas tanto à esquerda quanto à direita com respeito a estrutura modelo de Hurewicz. Desde que equivalências homotópicas são equivalências homotópicas fracas, essa mesma afirmação também vale com respeito às estruturas modelo mista e de Quillen em Top , conforme a justificativa que segue.

De fato, sejam $f, g : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\text{Top}}$ homotópicas, no sentido usual, com respeito a $H : A \times [0, 1] \rightarrow B \in \overrightarrow{\text{Top}}$. Seja $B^{[0,1]}$ o espaço de caminhos em B (com a topologia compacto-aberta, como usual) e sejam as aplicações

$$i_0, i_1 : A \rightarrow A \times [0, 1]$$

$$i_0(a) := (a, 0)$$

$$i_1(a) := (a, 1)$$

$$p : A \times [0, 1] \rightarrow A$$

$$p(a, t) := a$$

$$e_0, e_1 : B^{[0,1]} \rightarrow B$$

$$e_0(\gamma) := \gamma(0)$$

$$e_1(\gamma) := \gamma(1)$$

$$j : B \rightarrow B^{[0,1]}$$

$$j(b) := \text{constante}_b.$$

Desde que p e e_0 são retrações por deformação ($pi_0 = 1$, $i_0p \simeq 1$, $e_0j = 1$, $je_0 \simeq 1$), $p(i_0 \amalg i_1) = 1 \amalg 1$ e $(e_0 \amalg e_1)j = 1 \amalg 1$, segue que $A \times [0, 1]$ define um objeto cilindro para A e $B^{[0,1]}$ define um objeto caminho para B .

Desde que $Hi_0 = f$ e $Hi_1 = g$, segue que f e g são homotópicas à esquerda. Finalmente, segue da bem conhecida adjunção $- \times [0, 1] \dashv (-)^{[0,1]}$ que H induz uma aplicação contínua $H' : A \rightarrow B^{[0,1]}$ tal que $e_0H' = f$ e $e_1H' = g$ e daí f e g também são homotópicas à direita.

O restante desta seção é destinado a apresentar vários resultados sobre homotopia à esquerda e à direita. Estes resultados serão aplicados na construção da categoria homotópica de uma categoria modelo.

Lema 1.6.5. *Sejam $f, g : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$. Se $f \sim^e g$, então existe uma homotopia à esquerda boa entre f e g .*

Demonstração. Seja $H : \tilde{A} \rightarrow B$ uma homotopia à esquerda entre f e g com respeito, digamos, ao objeto cilindro $\tilde{A} = ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), \tilde{A}, i, p)$.

Por (EM5)(a) existem $j : A \amalg A \rightarrow A' \in \mathcal{K}$ e $q : A' \rightarrow \tilde{A} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ (para algum $A' \in |\mathcal{M}|$) tais que $i = qj$.

$$\begin{array}{ccccc}
 A \amalg A & \xrightarrow{1_A \amalg 1_A} & A & & \\
 \downarrow j \in \mathcal{K} & \searrow i & \nearrow p \in \mathcal{W} & & \\
 A' & \xrightarrow{q \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}} & \tilde{A} & & \\
 & \searrow H' & \downarrow H & & \\
 & & B & &
 \end{array}$$

Definamos $p' := pq$, $A' := ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), A', j, p')$ e notemos que A' é um objeto cilindro bom, pois $j \in \mathcal{K}$, $p' \in \mathcal{W}$ (composição de equivalências fracas) e $p'j = pqj = pi = 1_A \amalg 1_A$.

Por fim, definindo $H' := Hq$ segue que

$$H'j = Hqj = Hi = f \amalg g$$

e concluímos que H' é uma homotopia à esquerda boa entre f e g com respeito a A' . \square

Lema 1.6.6. *Sejam $f, g : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$. Se $f \sim^e g$ e B é fibrante, então existe uma homotopia à esquerda muito boa entre f e g .*

Demonstração. Seja $H : \tilde{A} \rightarrow B$ uma homotopia à esquerda boa entre f e g com respeito, digamos, ao objeto cilindro bom $\tilde{A} = ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), \tilde{A}, i, p)$.

Por (EM5)(a) existem $j : \tilde{A} \rightarrow A' \in \mathcal{K}$ e $q : A' \rightarrow A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ (para algum $A' \in |\mathcal{M}|$) tais que $p = qj$ (1).

$$\begin{array}{ccccc}
 A \amalg A & \xrightarrow{1_A \amalg 1_A} & A & & \\
 \searrow i \in \mathcal{K} & & \nearrow p \in \mathcal{W} & & \\
 & \tilde{A} & & A' & \\
 & \downarrow H & \nearrow j \in \mathcal{K} & & \\
 & B & \nwarrow H' & &
 \end{array}$$

.

Segue de (1) e de (EM2) que $j \in \mathcal{W}$ e então $j \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ (2). Por (2) e por B ser fibrante segue de (EM4)(b) que existe $H' : A' \rightarrow B$ tal que $H'j = H$ (3).

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{A} & \xrightarrow{H} & B \\
 j \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W} \downarrow & \nearrow H' & \downarrow \in \mathcal{F} \\
 A' & \longrightarrow & *
 \end{array}$$

.

Definamos $i' := ji$, $A' := ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), A', i', q)$ e notemos que A' é um objeto cilindro muito bom, pois $i' \in \mathcal{K}$ (composição de cofibrações), $q \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ e $qi' = qji = pi = 1_A \amalg 1_A$.

Por fim, como $H'i' = H'ji \stackrel{(3)}{=} Hi = f \amalg g$, segue que H' é uma homotopia à esquerda muito boa entre f e g com respeito a A' . \square

Lema 1.6.7. *Sejam $A, B \in |\mathcal{M}|$. A relação binária \sim^e definida em $\mathcal{M}(A, B)$ é reflexiva e simétrica.*

Demonstração. Seja $f : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$. Para a reflexividade, fixemos um coproduto $(A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1)$ de A e A (EM1) e definamos $A := ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), A, 1_A \amalg 1_A, 1_A)$.

É imediato que A é um objeto cilindro e definindo $H := f$, segue que

$$H(1_A \amalg 1_A) = f(1_A \amalg 1_A) = (f1_A) \amalg (f1_A) = f \amalg f,$$

isto é, H é uma homotopia à esquerda entre f e f com respeito a A . Logo $f \sim^e f$.

Para a simetria, sejam $f, g : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ tais que $f \sim^e g$. Seja $H : \tilde{A} \rightarrow B$ uma homotopia à esquerda entre f e g com respeito, digamos, ao objeto cilindro $\tilde{A} := ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), \tilde{A}, i, p)$.

Definamos $i' := i_1 \amalg i_0$, $A' := ((A \amalg A, \alpha_1, \alpha_0), \tilde{A}, i', p)$ e notemos que A' é um objeto cilindro, pois

$$pi' = p(i_1 \amalg i_0) = (pi_1) \amalg (pi_0) = 1_A \amalg 1_A.$$

Segue que

$$Hi' = H(i_1 \amalg i_0) = (Hi_1) \amalg (Hi_0) = g \amalg f$$

e então H é uma homotopia à esquerda entre g e f com respeito a A' . Logo $g \sim^e f$. \square

Lema 1.6.8. *Sejam $A, B \in |\mathcal{M}|$. Se A é cofibrante, então a relação binária \sim^e definida em $\mathcal{M}(A, B)$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Basta mostrarmos a propriedade transitiva da relação binária \sim^e . Sejam $f, g, h : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ tais que $f \sim^e g$ e $g \sim^e h$.

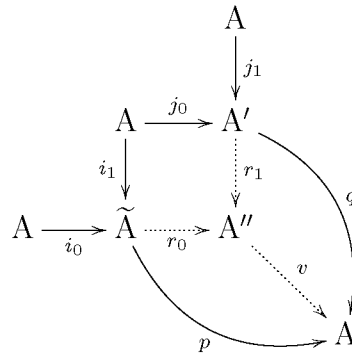
Seja $H : \tilde{A} \rightarrow B$ uma homotopia à esquerda entre f e g com respeito, digamos, ao objeto cilindro $\tilde{A} := ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), \tilde{A}, i, p)$.

Seja $H' : A' \rightarrow B$ uma homotopia à esquerda boa entre g e h com respeito, digamos, ao objeto cilindro bom $A' := ((A \amalg A, \alpha'_0, \alpha'_1), A', j, q)$.

Como por hipótese A é cofibrante e A' é um objeto cilindro bom, então, em particular, $j_0 \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ (1) pelo Lema 1.5.6.

Definimos o objeto A'' e as flechas r_0 e r_1 através do pushout de j_0 e i_1 . Segue de (1) que $r_0 \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ (2), pois $\mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ é fechada por pushouts.

Desde que $qj_0 = 1_A = pi_1$, segue da propriedade universal do pushout que existe $v : A'' \rightarrow A$ tal que $vr_0 = p$ (3) e $vr_1 = q$ (4).



Segue de (2), (3) e (EM2) que $v \in \mathcal{W}$ (5). Definamos $u := (r_0 i_0) \amalg (r_1 j_1)$ (com respeito a $(A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1)$) e notemos que por (3) e (4):

$$vu = v((r_0 i_0) \amalg (r_1 j_1)) = (vr_0 i_0) \amalg (vr_1 j_1) = (pi_0) \amalg (qj_1) = 1_A \amalg 1_A \quad (6).$$

Segue de (5) e (6) que $A'' := ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), A'', u, v)$ é um objeto cilindro.

Desde que $Hi_1 = g = H'j_0$, segue de novo da propriedade universal do pushout que existe $H'' : A'' \rightarrow B$ tal que $H''r_0 = H$ (7) e $H''r_1 = H'$ (8).

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{j_0} & A' \\
 i_1 \downarrow & & \downarrow r_1 \\
 \tilde{A} & \xrightarrow{r_0} & A'' \\
 & \searrow H & \downarrow H'' \\
 & & B
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{curved arrow } H' \text{ from } A' \text{ to } B \\
 \text{curved arrow } H \text{ from } \tilde{A} \text{ to } B
 \end{array}$$

Finalmente, segue de (7) e (8) que

$$H''u = H''((r_0i_0) \amalg (r_1j_1)) = (H''r_0i_0) \amalg (H''r_1j_1) = (Hi_0) \amalg (H'j_1) = f \amalg h.$$

Portanto H'' é uma homotopia à esquerda entre f e h com respeito a A'' . \square

Definição 1.6.9. *Sejam $A, B \in |\mathcal{M}|$. Denotamos por $[A, B]^e$ o conjunto quociente de $\mathcal{M}(A, B)$ pela relação de equivalência gerada pela relação binária \sim^e . Se $f \in \mathcal{M}(A, B)$, então a classe de equivalência de f é denotada por $[f]^e$ e chamada de classe de homotopia à esquerda de f .*

Observação 1.6.10. *Segue dos resultados anteriores que se A é cofibrante, então $[A, B]^e = \mathcal{M}(A, B) / \sim^e$. Logo, se $f, g \in \mathcal{M}(A, B)$, então $[f]^e = [g]^e$ se, e somente se, $f \sim^e g$.*

Lema 1.6.11. *Sejam $f, g : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ tais que $f \sim^e g$ e $h : B \rightarrow C \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$. Então $(hf) \sim^e (hg)$.*

Demonstração. Seja $H : \tilde{A} \rightarrow B$ uma homotopia à esquerda entre f e g com respeito, digamos, ao objeto cilindro $\tilde{A} := ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), \tilde{A}, i, p)$.

Definamos $H' := hH$. Segue que $H'i = hHi = h(f \amalg g) = (hf) \amalg (hg)$.

Logo H' é uma homotopia à esquerda entre hf e hg com respeito a \tilde{A} . \square

Lema 1.6.12. *Fixemos $p : X \rightarrow Y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ em \mathcal{M} . Se $A \in |\mathcal{M}|$ é cofibrante, então a aplicação*

$$\begin{aligned}
 p_* : [A, X]^e &\rightarrow [A, Y]^e \\
 [f]^e &\mapsto [pf]^e
 \end{aligned}$$

é uma bijeção.

Demonstração. Sejam $f, g : A \rightarrow B \in \vec{\mathcal{M}}$ tais que $[f]^e = [g]^e$. Como A é cofibrante, então $f \sim^e g$. Agora segue do Lema anterior que $(pf) \sim^e (pg)$, isto é, $[pf]^e = [pg]^e$. Por isso p_* está bem definida.

Seja $g : A \rightarrow Y \in \vec{\mathcal{M}}$. Desde que por hipótese A é cofibrante e $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, segue de (EM4)(a) que existe um levantamento, digamos $f : A \rightarrow X \in \vec{\mathcal{M}}$, do quadrado comutativo abaixo. Logo $p_*([f]^e) = [pf]^e = [pg]^e$ e segue que p_* é sobrejetiva.

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\quad} & X \\ \kappa \Downarrow & \nearrow f & \downarrow p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W} \\ A & \xrightarrow{\quad g \quad} & Y \end{array}$$

Sejam $f, g : A \rightarrow X \in \vec{\mathcal{M}}$ tais que $p_*([f]^e) = p_*([g]^e)$, ou seja, $(pf) \sim^e (pg)$.

Seja $H : \tilde{A} \rightarrow Y$ uma homotopia à esquerda boa entre (pf) e (pg) com respeito, digamos, ao objeto cilindro bom $\tilde{A} = ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), \tilde{A}, j, q)$.

Desde que $Hj = (pf) \amalg (pg) = p(f \amalg g)$, $j \in \mathcal{K}$ e $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$, segue de (EM4)(a) que existe um levantamento, digamos $H' : \tilde{A} \rightarrow X$, do quadrado comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{f \amalg g} & X \\ j \in \mathcal{K} \downarrow & \nearrow H' & \downarrow p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W} \\ \tilde{A} & \xrightarrow{\quad H \quad} & Y \end{array}$$

Então $H'j = f \amalg g$ e por isso H' é uma homotopia à esquerda entre f e g com respeito a \tilde{A} . Logo $[f]^e = [g]^e$ e então p_* é injetiva. \square

Lema 1.6.13. *Sejam $h : X \rightarrow A \in \vec{\mathcal{M}}$ e $f, g : A \rightarrow B \in \vec{\mathcal{M}}$. Se B é fibrante e $f \sim^e g$, então $(fh) \sim^e (gh)$.*

Demonstração. Desde que B é fibrante, existe uma homotopia à esquerda muito boa $H : \tilde{A} \rightarrow B$ entre f e g com respeito, digamos, ao objeto cilindro muito bom $\tilde{A} = ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), \tilde{A}, i, p)$.

Seja $\tilde{X} = ((X \amalg X, \alpha'_0, \alpha'_1), \tilde{X}, j, q)$ um objeto cilindro bom para X .

Desde que $j \in \mathcal{K}$, $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ e

$$pi(h \oplus h) = (1_A \amalg 1_A)(h \oplus h) = (1_A h) \amalg (1_A h) = h \amalg h = (h1_X) \amalg (h1_X) = h(1_X \amalg 1_X) = hqj,$$

segue de (EM4)(a) que existe um levantamento, digamos $l : \tilde{X} \rightarrow \tilde{A}$, do diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccccc}
X \amalg X & \xrightarrow{h \oplus h} & A \amalg A & \xrightarrow{i \in \mathcal{K}} & \tilde{A} \xrightarrow{H} B \\
j \in \mathcal{K} \downarrow & & & \nearrow l & \downarrow p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W} \\
\tilde{X} & \xrightarrow{q} & X & \xrightarrow{h} & A
\end{array}$$

Definamos $H' := Hl$ e notemos que

$$H'j = Hlj = Hi(h \oplus h) = (f \amalg g)(h \oplus h) = (fh) \amalg (gh),$$

isto é, H' é uma homotopia à esquerda entre fh e gh com respeito a \tilde{X} . \square

Precisamos do lema abaixo para provar o resultado que se seguirá. A demonstração será omitida.

Lema 1.6.14. *Seja S um conjunto e seja \simeq uma relação binária reflexiva e simétrica em S . Seja \approx a relação de equivalência gerada por \simeq . Para quaisquer $a, b \in S$ de modo que $a \approx b$, existe $s \in S$ tal que $a \simeq s$ e $s \simeq b$.*

Lema 1.6.15. *Sejam $A, B, C \in |\mathcal{M}|$. Se C é fibrante, então a composição induz uma aplicação*

$$\begin{aligned}
[A, B]^e \times [B, C]^e &\rightarrow [A, C]^e \\
([f]^e, [g]^e) &\mapsto [gf]^e
\end{aligned}$$

Demonstração. Seja \approx a relação de equivalência gerada pela relação binária (reflexiva e simétrica) \sim^e .

Desde que C é fibrante, segue dos resultados anteriores que a relação de homotopia à esquerda é estável por composição tanto à esquerda quanto à direita.

Vamos mostrar que a aplicação acima está bem definida.

Sejam $f, f' \in \mathcal{M}(A, B)$ e $g, g' \in \mathcal{M}(B, C)$ tais que $f \approx f'$ e $g \approx g'$. Sejam $u \in \mathcal{M}(A, B)$ e $v \in \mathcal{M}(B, C)$ tais que $f \sim^e u$, $u \sim^e f'$, $g \sim^e v$ e $v \sim^e g'$ (pelo lema anterior). Segue-se:

$$\begin{aligned}
&f \sim^e u, u \sim^e f', g \sim^e v, v \sim^e g' \Rightarrow \\
&\Rightarrow (gf) \sim^e (gu), (gu) \sim^e (gf'), (gf') \sim^e (vf') \text{ e } (vf') \sim^e (g'f') \Rightarrow \\
&\Rightarrow (gf) \approx (gu), (gu) \approx (gf'), (gf') \approx (vf') \text{ e } (vf') \approx (g'f') \Rightarrow \\
&\Rightarrow (gf) \approx (g'f') \Rightarrow \\
&\Rightarrow [gf]^e = [g'f']^e.
\end{aligned}$$

\square

Os resultados que encerram esta seção são os correspondentes para os conceitos de objeto caminho e homotopia à direita, assim sendo as demonstrações são duais às anteriores e podem ser encontradas em [15].

Lema 1.6.16. *Seja $\bar{B} := ((B \amalg B, \pi_0, \pi_1), \bar{B}, j, q)$ um objeto caminho. Então $q_0, q_1 : \bar{B} \rightarrow B$ são equivalências fracas.*

Lema 1.6.17. *Seja $\bar{B} := ((B \amalg B, \pi_0, \pi_1), \bar{B}, j, q)$ um objeto caminho. Se B é fibrante e \bar{B} é um objeto caminho bom, então $q_0, q_1 : \bar{B} \rightarrow B$ são fibrações acíclicas.*

Lema 1.6.18. *Sejam $f, g : A \rightarrow B \in \vec{\mathcal{M}}$. Se $f \sim^d g$, então existe uma homotopia à direita boa entre f e g .*

Lema 1.6.19. *Sejam $f, g : A \rightarrow B \in \vec{\mathcal{M}}$. Se $f \sim^d g$ e A é cofibrante, então existe uma homotopia à direita muito boa entre f e g .*

Lema 1.6.20. *Sejam $A, B \in |\mathcal{M}|$. A relação binária \sim^d definida em $\mathcal{M}(A, B)$ é reflexiva e simétrica.*

Lema 1.6.21. *Sejam $A, B \in |\mathcal{M}|$. Se B é fibrante, então a relação binária \sim^d definida em $\mathcal{M}(A, B)$ é uma relação de equivalência.*

Definição 1.6.22. *Sejam $A, B \in |\mathcal{M}|$. Denotamos por $[A, B]^d$ o conjunto quociente de $\mathcal{M}(A, B)$ pela relação de equivalência gerada pela relação binária \sim^d . Se $f \in \mathcal{M}(A, B)$, então a classe de equivalência de f é denotada por $[f]^d$ e chamada de classe de homotopia à direita de f .*

Observação 1.6.23. *Segue dos resultados anteriores que se B é fibrante, então $[A, B]^e = \mathcal{M}(A, B) / \sim^d$. Logo, se $f, g \in \mathcal{M}(A, B)$, então $[f]^d = [g]^d$ se, e somente se, $f \sim^d g$.*

Lema 1.6.24. *Sejam $f, g : A \rightarrow B \in \vec{\mathcal{M}}$ tais que $f \sim^d g$ e $h : X \rightarrow A \in \vec{\mathcal{M}}$. Então $(fh) \sim^d (gh)$.*

Lema 1.6.25. *Fixemos $i : X \rightarrow Y \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ em \mathcal{M} . Se $B \in |\mathcal{M}|$ é fibrante, então a aplicação*

$$\begin{aligned} i^* : [Y, B]^d &\rightarrow [X, B]^d \\ [f]^d &\mapsto [fi]^d, \end{aligned}$$

é uma bijeção.

Lema 1.6.26. *Sejam $f, g : A \rightarrow B \in \vec{\mathcal{M}}$ e $h : B \rightarrow C \in \vec{\mathcal{M}}$. Se A é cofibrante e $f \sim^d g$, então $(hf) \sim^d (hg)$.*

Lema 1.6.27. *Sejam $A, B, C \in |\mathcal{M}|$. Se A é cofibrante, então a composição induz uma aplicação*

$$\begin{aligned} [A, B]^d \times [B, C]^d &\rightarrow [A, C]^d \\ ([f]^d, [g]^d) &\mapsto [gf]^d \end{aligned}$$

1.7 Homotopia e equivalência homotópica

Começamos esta seção mostrando o relacionamento entre homotopia à esquerda e homotopia à direita, então definiremos os conceitos de homotopia, equivalência homotópica e com esses conceitos generalizados veremos uma versão do teorema do Whitehead em categorias modelo.

Lema 1.7.1. *Sejam $f, g : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$.*

(a) *Se A é cofibrante e $f \sim^e g$, então $f \sim^d g$;*

(b) *Se B é fibrante e $f \sim^d g$, então $f \sim^e g$.*

Demonstração. Mostremos (b) pois a prova de (a) é dual. Seja $H : A \rightarrow \overline{B}$ uma homotopia à direita boa entre f e g com respeito, digamos, ao objeto caminho bom $\overline{B} = ((B \amalg B, \pi_0, \pi_1), \overline{B}, j, q)$. Fixemos um objeto cilindro bom arbitrário,

$$\tilde{A} = ((A \amalg A, \alpha_0, \alpha_1), \tilde{A}, i, p).$$

Desde que $i \in \mathcal{K}$, $q_0 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$ (pelo lema 1.6.17) e

$$q_0(jf \amalg H) = q_0jf \amalg q_0H = f \amalg f = f(1 \amalg 1) = fpi,$$

segue de (EM4)(a) que existe um levantamento $l : \tilde{A} \rightarrow \overline{B}$ do diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{jf \amalg H} & \overline{B} \xrightarrow{q_1} B \\ i \in \mathcal{K} \downarrow & \nearrow l & \downarrow q_0 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W} \\ \tilde{A} & \xrightarrow{fp} & B \end{array}$$

Por inspeção direta se verifica que $q_1l : \tilde{A} \rightarrow B$ é uma homotopia à esquerda entre f e g com respeito a \tilde{A} . \square

Definição 1.7.2. *Sejam $f, g : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$. Dizemos que f é homotópica a g e escrevemos $f \sim g$ se $f \sim^e g$ e $f \sim^d g$.*

Definição 1.7.3. *Seja $f : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$. Dizemos que f é uma equivalência homotópica se existir $g : B \rightarrow A \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ tal que $gf \sim 1_A$ e $fg \sim 1_B$. Neste caso também dizemos que g é uma inversa homotópica de f .*

Lema 1.7.4 (O teorema de Whitehead em categorias modelo). *Seja $f : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ e suponhamos que A e B são ambos objetos bifibrantes. Então f é uma equivalência homotópica se, e somente se, f é uma equivalência fraca.*

Demonstração. Sejam $0, 1 \in |\mathcal{C}|$ objetos inicial e final, respectivamente. Suponhamos que $f \in \mathcal{W}$. Por (EM5)(b), existem $i : A \rightarrow X \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ (1) e $p : X \rightarrow B \in \mathcal{F}$ (para algum $X \in |\mathcal{M}|$) tais que $f = pi$. Segue de (EM2) que $p \in \mathcal{W}$, e então $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$.

Desde que A é fibrante, segue de (1) e (EM4)(b) que existe $j : X \rightarrow A$ tal que $ji = 1_A$, e então $(ji) \sim 1_A$ (2).

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_A} & A \\ i \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W} \downarrow & \nearrow j & \downarrow \in \mathcal{F} \\ X & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Notemos que $(0 \rightarrow X) = (A \rightarrow^{i \in \mathcal{K}} X)(0 \rightarrow^{\in \mathcal{K}} A)$ e $(X \rightarrow 1) = (B \rightarrow^{\in \mathcal{F}} 1)(X \rightarrow^{p \in \mathcal{F}} B)$, e então X é bifibrante (3).

Segue de (1), (3) e Lema 1.6.25 que i induz uma bijeção

$$\begin{aligned} i^* : [X, X]^d &\rightarrow [A, X]^d \\ [h]^d &\mapsto [hi]^d. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} i^*([ij]^d) &= [(ij)i]^d = [i1_A]^d = [1_X i]^d = i^*([1_X]^d) \Rightarrow \\ &\Rightarrow [ij]^d = [1_X]^d \Rightarrow \\ &\Rightarrow (ij) \sim^d 1_X \Rightarrow^{(3)} \\ &\Rightarrow^{(3)} (ij) \sim 1_X \quad (4). \end{aligned}$$

Com um argumento dual, concluímos que existe $q : B \rightarrow X$ tal que $(pq) \sim 1_B$ (5) e $(qp) \sim 1_X$ (6).

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & X \\ \kappa \ni \downarrow & \nearrow q & \downarrow p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W} \\ B & \xrightarrow{1_B} & B \end{array}$$

$$p_* : [X, X]^e \rightarrow [X, B]^e$$

$$[h]^e \mapsto [ph]^e.$$

Definindo $g := jq$, segue de (2), (4), (5) e (6) que

$$gf = (jqpi) \sim (j1_X i) = (ji) \sim 1_A \quad (7)$$

e

$$fg = (pijq) \sim (p1_X q) = (pq) \sim 1_B \quad (8).$$

Segue de (7) e (8) que f é uma equivalência homotópica.

Reciprocamente, suponhamos que f seja uma equivalência homotópica com uma inversa homotópica g , digamos.

Consideremos a fatoração $f = pi$ com $i \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$ e $p \in \mathcal{F}$ já mencionada acima. Por (EM2), para concluirmos que $f \in \mathcal{W}$ basta mostrarmos que $p \in \mathcal{W}$.

Seja $H : \tilde{B} \rightarrow B$ uma homotopia à esquerda boa (9) entre fg e 1_B com respeito, digamos, ao objeto cilindro bom $\tilde{B} = ((B \amalg B, \alpha_0, \alpha_1), \tilde{B}, r, s)$. Desde que B é cofibrante, segue de (9) e do Lema 1.5.6 que $r_0 \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$.

Desde que $Hr_0 = fg = pig$, segue de (EM4)(b) que existe um levantamento, digamos $H' : \tilde{B} \rightarrow X$, do diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccccc} & & B & \xrightarrow{ig} & X \\ & & \downarrow r_0 \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W} & \nearrow H' & \downarrow p \in \mathcal{F} \\ B & \xrightarrow{r_1} & \tilde{B} & \xrightarrow{H} & B \end{array}$$

Definamos $t := H'r_1$ e notemos que $pt = pH'r_1 = Hr_1 = 1_B$ (10).

Desde que $i : A \rightarrow X$ é uma equivalência fraca entre objetos bifibrantes, segue pelo que já foi provado que existe uma inversa homotópica da mesma, digamos $u : X \rightarrow A$ ($(ui) \sim 1_A$ e $(iu) \sim 1_X$ (11)).

Ademais, H' é uma homotopia à esquerda entre $H'r_0 = ig$ e $H'r_1 = t$ (com respeito a \tilde{B}), logo $(ig) \sim^e t \Rightarrow t \sim^e (ig) \Rightarrow t \sim (ig)$ (12) (B cofibrante).

Notemos que $f = pi \Rightarrow fu = piu \Rightarrow^{(11)} (fu) \sim (p1_X) = p \Rightarrow (fu) \sim p \Rightarrow p \sim (fu)$ (13).

Agora, segue de (11), (12) e (13) que

$$(tp) \sim (igp) \sim (igfu) \sim (i1_A u) = (iu) \sim 1_X \Rightarrow (tp) \sim 1_X \quad (14).$$

Segue de (14) e da Observação 1.6.2 que $(tp) \in \mathcal{W}$ (15).

Finalmente, segue de (10) e do diagrama comutativo abaixo que p é um retrato de tp e segue de (15) e (EM3) que $p \in \mathcal{W}$ e então $f \in \mathcal{W}$.

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{1_X} & X & \xrightarrow{1_X} & X \\
p \downarrow & & tp \downarrow & & p \downarrow \\
B & \xrightarrow{t} & X & \xrightarrow{p} & B
\end{array}$$

.

□

1.8 A categoria homotópica de uma categoria modelo

Um problema importante em matemática é o de determinar uma localização de uma categoria \mathcal{C} com respeito a uma dada classe de morfismos L . Informalmente isso significa construir uma categoria \mathcal{D} parecida com \mathcal{C} de modo que os morfismos de L sejam invertíveis em \mathcal{D} . Não há em geral um método para construir localizações, exceto para categorias pequenas, contudo mesmo nesse caso a localização obtida não é, em geral, manejável.

O conceito de categoria homotópica de uma categoria modelo é importante pois: fornece um cenário formal para se trabalhar com propriedades homotópicas e resolve parcialmente o problema de construir localizações, pois a categoria homotópica é precisamente a localização da categoria modelo com respeito às suas equivalências fracas.

A fim de se definir a categoria homotópica de uma categoria modelo precisamos dos importantes conceitos de resoluções cofibrantes e resoluções fibrantes.

Definição 1.8.1. *Sejam $A, B \in |\mathcal{M}|$. Então*

- (a) *uma resolução cofibrante de A é um par $(A', p : A' \rightarrow A)$ tal que A' é um objeto cofibrante em \mathcal{M} e $p \in \mathcal{W}$;*
- (b) *uma resolução cofibrante boa de A é uma resolução cofibrante (A', p) de A tal que $p \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$;*
- (c) *uma resolução fibrante de B é um par $(B', i : B \rightarrow B')$ tal que B' é um objeto fibrante em \mathcal{M} e $i \in \mathcal{W}$;*
- (d) *uma resolução fibrante boa de B é uma resolução fibrante (B', i) de B tal que $i \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$.*

Na literatura os termos aproximação e substituição também são usados em vez de resolução. É interessante observar que em Top com a estrutura modelo de Quillen, a bem conhecida CW-aproximação (cf. [12]) de um espaço topológico X é uma resolução cofibrante de X em linguagem de categorias modelo.

No que segue verificamos que todo objeto em \mathcal{M} admite resoluções cofibrantes boas e resoluções fibrantes boas.

Sejam $0 \in |\mathcal{M}|$ um objeto inicial, $1 \in |\mathcal{M}|$ um objeto final e $A \in |\mathcal{M}|$. Aplicando (EM5)(a) em $0 \rightarrow A$, obtemos um objeto cofibrante LA e uma fibração acíclica $p_A : LA \rightarrow A$ tal que o triângulo abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{\quad} & A \\ & \searrow \kappa \ni & \nearrow p_A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{W} \\ & LA & \end{array}$$

Similarmente, aplicando (EM5)(b) em $A \rightarrow 1$ obtemos um objeto fibrante RA e uma cofibração acíclica $i_A : A \rightarrow RA$ tal que o triângulo abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} & RA & \\ i_A \in \mathcal{K} \cap \mathcal{W} \nearrow & & \searrow \in \mathcal{F} \\ A & \xrightarrow{\quad} & 1 \end{array}$$

Com isso em mãos fazemos a seguinte convenção: para cada $A \in |\mathcal{M}|$ fixamos uma resolução cofibrante boa (LA, p_A) de A e uma resolução fibrante boa (RA, i_A) de A . Se A já for um objeto cofibrante, então convencioanamos que $LA = A$ e $p_A = 1_A$; se A já for um objeto fibrante, então convencioanamos que $RA = A$ e $i_A = 1_A$.

Lema 1.8.2. *Seja $A \in |\mathcal{M}|$. Então os objetos RLA e LRA são ambos bifibrantes.*

Demonstração. Por construção RLA é fibrante. Desde que $(0 \rightarrow RLA) = i_{LA}(0 \rightarrow LA)$ é uma composição de cofibrações segue o resultado. Analogamente se mostra que LRA é bifibrante. \square

Lema 1.8.3. *Seja $f : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$. Então existe $\widehat{f} : LA \rightarrow LB \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ de modo que o quadrado abaixo comuta.*

$$\begin{array}{ccc} LA & \xrightarrow{\widehat{f}} & LB \\ p_A \downarrow & & \downarrow p_B \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Ademais,

(a) Se $\widehat{f} : LA \rightarrow LB \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ também cumpre $p_B \widehat{f} = f p_A$, então $\widehat{f} \sim^e \widehat{f}$ e $\widehat{f} \sim^d \widehat{f}$;

- (b) $\widehat{f} \in \mathcal{W}$ se, e somente se, $f \in \mathcal{W}$;
- (c) Seja $g : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ e seja $\widehat{g} : LA \rightarrow LB \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ tal que $p_B \widehat{g} = g p_A$. Se B é fibrante e $f \sim^e g$, então $\widehat{f} \sim^e \widehat{g}$ e $\widehat{f} \sim^d \widehat{g}$.

Demonstração. Veja Lema 5.1 em [15]. □

Lema 1.8.4. *Seja $f : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$. Então existe $\overline{f} : RA \rightarrow RB \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ de modo que o quadrado abaixo comuta.*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ i_A \downarrow & & \downarrow i_B \\ RA & \xrightarrow{\overline{f}} & RB \end{array}$$

Ademais,

- (a) Se $\overline{f} : RA \rightarrow RB \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ também cumpre $i_B f = \overline{f} i_A$, então $\overline{f} \sim^e \overline{f}$ e $\overline{f} \sim^d \overline{f}$;
- (b) $\overline{f} \in \mathcal{W}$ se, e somente se, $f \in \mathcal{W}$;
- (c) Seja $g : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ e seja $\overline{g} : RA \rightarrow RB \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ tal que $i_B g = \overline{g} i_A$. Se A é cofibrante e $f \sim^d g$, então $\overline{f} \sim^e \overline{g}$ e $\overline{f} \sim^d \overline{g}$.

Demonstração. Veja Lema 5.3 em [15]. □

Definição 1.8.5. *A categoria homotópica de uma categoria modelo \mathcal{M} , denotada $Ho(\mathcal{M})$, tem por definição os mesmos objetos de \mathcal{M} e para cada $A, B \in |\mathcal{M}|$ colocamos*

$$Ho(\mathcal{M})(A, B) := [RLA, RLB].$$

Definimos também um funtor, chamado de funtor canônico, entre uma categoria modelo e sua categoria homotópica como segue.

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{M} &\rightarrow Ho(\mathcal{M}) \\ A &\mapsto A \\ f : A \rightarrow B &\mapsto [\widehat{f} : RLA \rightarrow RLB]. \end{aligned}$$

O funtor canônico identifica objetos e leva flechas de \mathcal{M} em classes de homotopia; é rotina verificar que γ está bem definido nas flechas à partir dos dois lemas acima.

Observação 1.8.6. *Desde que em Top com a estrutura modelo de Hurewicz todos os objetos são bifibrantes então neste caso recuperamos a categoria homotópica clássica de Top .*

Proposição 1.8.7. *Seja $f : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$. Então $\gamma(f)$ é um isomorfismo em $Ho(\mathcal{M})$ se, e somente se, f é uma equivalência fraca em \mathcal{M} .*

Demonstração. Seja $f : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ uma equivalência fraca. Desde que $\gamma(f) = [\widehat{f} : RLA \rightarrow RLB]$ segue que \widehat{f} é uma equivalência fraca entre objetos bifibrantes e logo possui uma inversa homotópica, digamos $g : RLB \rightarrow RLA$ (teorema de Whitehead e lemas anteriores). Então $[g] : B \rightarrow A \in \overrightarrow{Ho(\mathcal{M})}$ e

$$[g]\gamma(f) = [g\widehat{f}] = [1_{RLA}] = 1_A.$$

Analogamente, $\gamma(f)[g] = 1_B$. Portanto $\gamma(f)$ é um isomorfismo em $Ho(\mathcal{M})$.

Reciprocamente, Suponhamos que $\gamma(f)$ seja um isomorfismo e seja $h : RLB \rightarrow RLA \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ tal que $\gamma(f)^{-1} = [h]$. Então

$$1_A = [1_{RLA}] = [h\widehat{f}] \Rightarrow h\widehat{f} \sim 1_{RLA}.$$

Analogamente, $\widehat{f}h \sim 1_{RLB}$. Portanto \widehat{f} é uma equivalência homotópica entre objetos bifibrantes e então é uma equivalência fraca (teorema de Whitehead). Que f é uma equivalência fraca segue dos lemas anteriores. \square

Definição 1.8.8. *Sejam \mathcal{C} uma categoria e $L \subseteq \overrightarrow{\mathcal{C}}$. Uma localização de \mathcal{C} com respeito a L , se existir, é um par (F, \mathcal{D}) onde \mathcal{D} é uma categoria e $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é um funtor tal que*

- (a) Ff é um isomorfismo em \mathcal{D} sempre que $f \in L$;
- (b) Para qualquer par (F', \mathcal{D}') onde \mathcal{D}' é uma categoria e $F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}'$ é um funtor que leva flechas de L em isomorfismos em \mathcal{D}' , existe um único funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ tal que $G \circ F = F'$.

Teorema 1.8.9. *Seja \mathcal{M} uma categoria modelo e seja \mathcal{W} sua classe de equivalências fracas. Então o par $(\gamma, Ho(\mathcal{M}))$ é uma localização de \mathcal{M} com respeito a \mathcal{W} .*

Demonstração. Veja Teorema 6.2 em [15]. \square

Este resultado revela algo muito interessante: a categoria homotópica de uma categoria modelo depende apenas de suas equivalências fracas. Neste sentido a classe de equivalências fracas de uma categoria modelo é a mais importante, enquanto suas cofibrações e fibrações são auxiliares nas diversas construções e resultados da teoria.

1.9 Equivalências de Quillen

As adjunções de Quillen são as ferramentas adequadas para se estudar o relacionamento de duas categorias modelo, pois, naturalmente, essas adjunções são compatíveis com as estruturas modelo envolvidas. Do mesmo modo, equivalências de Quillen são o modo adequado de se considerar duas categorias modelo iguais do ponto de vista homotópico, mesmo que tais categorias sejam bem diferentes do ponto de vista puramente categórico. Por exemplo, \mathbf{Top} e \mathbf{sSet} (com as estruturas modelo de Quillen) são Quillen equivalentes mas não são categorias equivalentes. Isto significa que a teoria homotópica de \mathbf{Top} é a mesma de \mathbf{sSet} , e esta última categoria possui algumas vantagens de se trabalhar pelo seu caráter mais combinatório.

Nesta seção definimos funtores derivados (totais), adjunções e equivalências de Quillen e apresentamos o importante teorema do funtor derivado total de Quillen.

Definição 1.9.1. *Sejam \mathcal{M} uma categoria modelo, \mathcal{D} uma categoria qualquer e $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor. Um funtor derivado à esquerda (FDE) de F é, se existir, um par $(\mathbf{L}F, \eta)$ onde $\mathbf{L}F : Ho(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{D}$ é um funtor, $\eta : \mathbf{L}F \circ \gamma \rightarrow F$ é uma transformação natural e tal que se cumpra o seguinte: para qualquer outro par (G, θ) onde $G : Ho(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{D}$ é um funtor e $\theta : G \circ \gamma \rightarrow F$ é uma transformação natural, existe uma única transformação natural $\theta' : G \rightarrow \mathbf{L}F$ tal que $\eta \circ (\theta' \cdot \gamma) = \theta$.*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{L}F \circ \gamma & \\ \theta' \cdot \gamma \nearrow & & \searrow \eta \\ G \circ \gamma & \xrightarrow{\theta} & F \end{array}$$

Analogamente se define o funtor derivado à direita (FDR) de F , caso exista, como um par $(\mathbf{R}F, \eta)$ onde $\mathbf{R}F : Ho(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{D}$ é um funtor, $\eta : F \rightarrow \mathbf{R}F \circ \gamma$ é uma transformação natural e se cumpre uma propriedade universal dual à acima.

Definição 1.9.2. *Seja $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ um funtor entre categorias modelo com funtores canônicos respectivamente denotados por $\gamma_{\mathcal{M}}$ e $\gamma_{\mathcal{N}}$. Um funtor derivado total à esquerda (FDTE) de F é, se existir, um FDE de $\gamma_{\mathcal{N}} \circ F : \mathcal{M} \rightarrow Ho(\mathcal{N})$. Analogamente se define o conceito de funtor derivado total à direita (FDTD) de F .*

Proposição 1.9.3. *Sejam $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ e $G : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ funtores entre categorias modelo tal que F é adjunto à esquerda de G . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *F preserva cofibrações e cofibrações triviais;*
- (b) *G preserva fibrações e fibrações triviais;*

- (c) F preserva cofibrações e G preserva fibrações;
- (d) F preserva cofibrações triviais e G preserva fibrações triviais.

Demonstração. A verificação é rotineira, segue da compatibilidade de funtores adjuntos com propriedades de levantamento. \square

Definição 1.9.4. *Sejam $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ e $G : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ funtores entre categorias modelo tal que F é adjunto à esquerda de G . Se qualquer uma das afirmações equivalentes acima se cumpre então dizemos que:*

- (a) (F, G) é um par de Quillen ou uma adjunção de Quillen;
- (b) F é um funtor de Quillen à esquerda;
- (c) G é um funtor de Quillen à direita;

Exemplo 1.9.5. *Seja Top_h (respectivamente Top_q , Top_m) equipado com a estrutura modelo de Hurewicz (respectivamente Quillen, Cole). As adjunções (triviais)*

$$1 : \text{Top}_q \rightleftarrows \text{Top}_h : 1,$$

$$1 : \text{Top}_q \rightleftarrows \text{Top}_m : 1,$$

$$1 : \text{Top}_m \rightleftarrows \text{Top}_h : 1$$

são adjunções de Quillen.

Definição 1.9.6. *Sejam $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ e $G : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ funtores entre categorias modelo tal que (F, G) é um par de Quillen. Se para qualquer objeto cofibrante A em \mathcal{M} , qualquer objeto fibrante B em \mathcal{N} e qualquer flecha $f : A \rightarrow GB$ tem-se que f é uma equivalência fraca se, e somente se, sua flecha adjunta $FA \rightarrow B$ é uma equivalência fraca, então dizemos que:*

- (a) (F, G) é equivalência de Quillen;
- (b) F é uma equivalência de Quillen à esquerda;
- (c) G é uma equivalência de Quillen à direita;
- (d) \mathcal{M} e \mathcal{N} são Quillen equivalentes.

Exemplo 1.9.7. *A adjunção*

$$|\cdot| : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Top} : \mathbf{Sing}$$

entre o funtor realização geométrica $|\cdot|$ e o funtor conjunto simplicial singular \mathbf{Sing} é uma equivalência de Quillen com relação as estruturas modelo de Quillen (cf. [15]).

Exemplo 1.9.8. *Por inspeção direta, a adjunção projeção-inclusão*

$$\pi : \mathbf{Ch}_R \rightleftarrows \mathbf{Ch}_R^+ : \iota$$

é uma equivalência de Quillen.

Para equivalências de Quillen envolvendo \mathbf{Cat} , \mathbf{Grpd} e \mathbf{sSet} referimos [61].

No capítulo 3 mostramos que as categorias de ações topológicas, A_∞ -ações e ações homotópicas são todas Quillen equivalentes.

Teorema 1.9.9 (O teorema do funtor derivado total de Quillen). *Seja (F, G) um par de Quillen. Então o FDTE \mathbf{LF} de F existe, o FDTD \mathbf{RG} de G existe e \mathbf{LF} é adjunto à esquerda de \mathbf{RG} . Ademais, se (F, G) é uma equivalência de Quillen, então os funtores \mathbf{LF} e \mathbf{RG} formam uma equivalência entre as categorias homotópicas.*

Demonstração. Veja [24] ou [28]. □

1.10 Categorias modelo cofibrantemente geradas

Em geral, é difícil verificar se dadas três classes de flechas em uma categoria \mathcal{C} , elas formam uma estrutura modelo. A dificuldade consiste especificamente em verificar os axiomas de levantamentos e fatorações. Quillen desenvolveu uma técnica de construir fatorações functoriais já com propriedades de levantamento, dando origem ao conceito de categoria modelo cofibrantemente gerada: uma categoria modelo equipada com dois conjuntos de flechas que geram (via levantamentos) todas as fibrações e fibrações acíclicas (e consequentemente todas as cofibrações acíclicas e cofibrações).

Categorias modelo cofibrantemente geradas são importantes não só pela representatividade de sua estrutura modelo por conjuntos de flechas geralmente simples e manipuláveis mas também porque proporcionam resultados de transferência de estrutura modelo para outras categorias via adjunções.

Nesta seção sempre suporemos que \mathcal{C} é uma categoria cocompleta e explicitaremos isso quando necessário. Precisamos de alguns conceitos de números ordinais e cardinais para o que seguirá, cuja referência utilizada é [21].

Definição 1.10.1. *Um ordinal (ou número ordinal) é um conjunto bem ordenado (X, \mathcal{R}) tal que para cada $x \in X$, $x = \{y \in X; y \mathcal{R} x, y \neq x\}$.*

Assumiremos alguns fatos sobre ordinais: o conjunto vazio é um ordinal (o ordinal nulo) e é denotado por 0; para quaisquer dois ordinais distintos A e B têm que $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$, logo a classe (própria) dos ordinais é totalmente ordenada por inclusão; Se A e B são ordinais e $A < B$, então $A \in B$; todo ordinal λ tem um ordinal sucessor (o menor ordinal maior que ele) denotado por $\lambda + 1$; um ordinal distinto de 0 e que não é sucessor de nenhum outro ordinal é chamado de ordinal limite.

Definição 1.10.2. *Dizemos que dois conjuntos dados são equinumerícos se existir uma bijeção entre eles.*

Definição 1.10.3. *Um cardinal (ou número cardinal) é um ordinal que não é equinumeríco a qualquer ordinal estritamente menor.*

Cada conjunto A é equinumeríco a um único cardinal, e este é dito ser sua cardinalidade e denotado por $\#A$.

Definição 1.10.4. *Um cardinal κ é dito ser singular se admitir um subconjunto cofinal com cardinalidade estritamente menor que κ . Caso contrário ele é dito regular.*

No que segue consideramos um ordinal como uma categoria de modo usual. Notemos também que na definição abaixo o par $(F\beta, (F\bar{\alpha} : F\alpha \rightarrow F\beta)_{\bar{\alpha} < \beta})$ é um cocone do funtor restrito $F|_{\beta}$.

Definição 1.10.5. *Sejam λ um ordinal não nulo e $F : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ um funtor. Dizemos que F é uma λ -sequência em \mathcal{C} se para cada ordinal limite $\beta < \lambda$ a flecha induzida pela propriedade universal do colimite $\text{colim} F|_{\beta} \rightarrow F(\beta)$ é um isomorfismo em \mathcal{C} .*

Definição 1.10.6. *Sejam λ um ordinal não nulo, $F : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ uma λ -sequência em \mathcal{C} e $L \subseteq \vec{\mathcal{C}}$. Dizemos que F é uma λ -sequência de flechas em L se $F\alpha \rightarrow F(\alpha + 1) \in L$ sempre que $\alpha + 1 < \lambda$.*

Definição 1.10.7. *Sejam $L \subseteq \vec{\mathcal{C}}$ e $f \in \vec{\mathcal{C}}$. Dizemos que f é uma composição transfinita de flechas em L se existir uma λ -sequência $F : \lambda \rightarrow \mathcal{C}$ de flechas em L e um colimite $(\text{colim} F, \psi)$ de F de modo que f é isomorfa a ψ_0 .*

Sejam κ um ordinal, $A \in |\mathcal{C}|$ e $L \subseteq \vec{\mathcal{C}}$.

Definição 1.10.8. *Dizemos que A é κ -pequeno com respeito a L se para cada cardinal regular $\rho \geq \kappa$ e para cada ρ -sequência F de flechas em L, a aplicação induzida*

$$\operatorname{colim} \mathcal{C}(A, F-) \rightarrow \mathcal{C}(A, \operatorname{colim} F)$$

é uma bijeção em \mathbf{Set} , onde $(\operatorname{colim} F, \psi)$ é um colimite de F .

Dizemos que A é pequeno com respeito a L se A é κ -pequeno com respeito a L para algum cardinal κ . Finalmente, dizemos que A é pequeno se A é pequeno com respeito a $\overrightarrow{\mathcal{C}}$.

Em \mathbf{Set} todo conjunto A é pequeno (cf. [28]) (de fato, A é $\#A$ -pequeno). Em \mathbf{Mod}_R todo R -módulo A é pequeno (cf. [15]) (de fato, A é κ -pequeno, onde $\kappa := \#A \cdot (\#A + \#R)$). Em \mathbf{Top} nem todo espaço topológico é pequeno (cf. [28]).

Definição 1.10.9. Seja $L \subseteq \overrightarrow{\mathcal{C}}$. Definimos a classe $\operatorname{push}(L)$ como segue.

$$\operatorname{push}(L) := \{f \in \overrightarrow{\mathcal{C}}; \text{ existe um quadrado pushout do tipo } \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{l} & \bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bullet & \xrightarrow{f} & \bullet \end{array} \text{ para algum } l \in L\}.$$

Definição 1.10.10. Seja $L \subseteq \overrightarrow{\mathcal{C}}$. Definimos as classes L_{inj} , L_{cof} e L_{cell} como segue.

- (a) $L_{inj} := L^{\pitchfork}$;
- (b) $L_{cof} := {}^{\pitchfork}(L^{\pitchfork}) = {}^{\pitchfork}L_{inj}$;
- (c) $L_{cell} := \{f \in \overrightarrow{\mathcal{C}}; f \text{ é uma composição transfinita de flechas em } \operatorname{push}(L)\}.$

As flechas em L_{cell} são chamadas de complexos celulares relativos (com respeito a L) ou de extensões celulares de flechas em L .

Pode-se mostrar que $L_{cell} \subseteq L_{cof}$ para qualquer $L \subseteq \overrightarrow{\mathcal{C}}$.

Para cada categoria \mathcal{C} temos os funtores $\operatorname{fon}, \operatorname{alv} : \operatorname{Arr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ que levam uma flecha f em sua fonte e seu alvo, respectivamente.

Definição 1.10.11. Uma fatoração funtorial em \mathcal{C} é um par (α, β) de endofuntores em $\operatorname{Arr}(\mathcal{C})$ de modo que

$$\operatorname{fon} \circ \alpha = \operatorname{fon}, \operatorname{alv} \circ \alpha = \operatorname{fon} \circ \beta, \operatorname{alv} \circ \beta = \operatorname{alv} \text{ e } f = \beta(f) \circ \alpha(f)$$

para qualquer $f \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$.

Definição 1.10.12. Sejam \mathcal{C} uma categoria cocompleta e $L \subseteq \mathcal{C}$. Dizemos que L permite o argumento do objeto pequeno (AOP) se para qualquer $f : A \rightarrow B \in L$ tem-se que A é um objeto pequeno com respeito a L_{cell} .

Teorema 1.10.13 (O argumento do objeto pequeno). *Sejam \mathcal{C} uma categoria cocompleta e I um conjunto de flechas em \mathcal{C} . Suponha que I permite o AOP. Então existe uma fatoração funtorial (α, β) em \mathcal{C} de modo que*

$$\alpha(f) \in I_{cell} \text{ e } \beta(f) \in I_{inj}$$

para qualquer $f \in \vec{\mathcal{C}}$. Em particular, $\alpha(f) \in I_{cof}$ e $\alpha(f) \dashv \beta(f)$.

Demonstração. Veja [24] ou [28]. □

Definição 1.10.14. *Seja $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, (\mathcal{W}, \mathcal{K}, \mathcal{F}))$ uma categoria modelo. Dizemos que \mathcal{C} é uma categoria modelo cofibrantemente gerada (CMCG) se existirem dois conjuntos de flechas $I, J \subseteq \vec{\mathcal{C}}$ de modo que:*

(CG1) I e J permitem o AOP;

(CG2) $J_{inj} = \mathcal{F}$;

(CG3) $I_{inj} = \mathcal{F} \cap \mathcal{W}$.

Segue que $I_{cof} = \mathcal{K}$ e $J_{cof} = \mathcal{K} \cap \mathcal{W}$.

Observação 1.10.15. *Considere a notação acima. Pode-se mostrar (cf. [24, 28]) que em uma CMCG as cofibrações são precisamente os retratos de extensões celulares de flechas em I .*

Os principais exemplos de categorias modelo cofibrantemente geradas são \mathbf{Top} (e suas subcategorias \mathbf{top} , \mathbf{Whtop} e \mathbf{Htop}) (cf. [15, 24, 25, 28]) com estrutura modelo de Quillen, \mathbf{sSet} (cf. [24, 28]) com estrutura modelo de Quillen e \mathbf{Ch}_R (cf [28]) e \mathbf{Ch}_R^+ (cf. [15]) com estruturas modelo projetivas.

Sejam $n \geq 0$, \mathbb{R}^n o espaço euclidiano real de dimensão n ($\mathbb{R}^0 := \{0\}$), \mathbb{S}^{n-1} a esfera unitária de \mathbb{R}^n ($\mathbb{S}^{-1} := \emptyset$) e \mathbb{D}^n o disco unitário fechado de \mathbb{R}^n ($\mathbb{D}^0 := \{0\}$).

Em \mathbf{Top} , os conjuntos $I := \{i_n : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{D}^n, x \mapsto x\}_{n \geq 0}$ e $J := \{j_n : \mathbb{D}^n \rightarrow [0, 1] \times \mathbb{D}^n, x \mapsto (0, x)\}_{n \geq 0}$ são escolhas que cumprem a definição acima.

Um fato interessante provado há pouco tempo é que \mathbf{Top} com a estrutura modelo de Hurewicz não é cofibrantemente gerada (cf. [50]). Algumas categorias de funtores também não são cofibrantemente geradas.

1.11 Categorias modelo monoidais

Nesta seção definimos categorias modelo monoidais, isto é, uma categoria com estruturas modelo e monoidal de modo que tais estruturas sejam compatíveis em certo sentido. Essa classe de categorias modelo é importante para a teoria de homotopia de operadas.

Definição 1.11.1. *Sejam $f : A \rightarrow B, g : X \rightarrow Y \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$. O pushout-product de f e g é a flecha $f \diamond g$ induzida do pushout de $f \otimes 1_X$ e $1_A \otimes g$ conforme o diagrama abaixo.*

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes X & \xrightarrow{f \otimes 1_X} & B \otimes X \\
 \downarrow 1_A \otimes g & & \downarrow 1_B \otimes g \\
 A \otimes Y & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \mathcal{P} \\
 & \searrow f \diamond g & \downarrow f \otimes 1_Y \\
 & & B \otimes Y
 \end{array}$$

Lembremos que um cosmo é uma categoria monoidal simétrica fechada e bicompleta.

Definição 1.11.2. *Uma categoria modelo monoidal (CMM) é um cosmo $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{I})$ equipado com uma estrutura modelo $(\mathcal{W}, \mathcal{K}, \mathcal{F})$ de modo que se cumpre o axioma abaixo.*

Axioma do Pushout-Product: Se $f, g \in \mathcal{K}$, então $f \diamond g \in \mathcal{K}$. Se, adicionalmente, f ou g é uma equivalência fraca, então também é $f \diamond g$.

Os exemplos principais de categorias modelo monoidais são \mathbf{top} com a estrutura modelo de Quillen (e estrutura monoidal cartesiana) e \mathbf{Ch}_R e \mathbf{Ch}_R^+ com estruturas modelo projetivas e estruturas monoidais usuais. Outros exemplos importantes mas que não serão considerados neste trabalho são: \mathbf{sSet} , \mathbf{top}_* (com estrutura monoidal dada pelo produto smash), categorias de espectros e de S-módulos. Para mais detalhes veja [27].

1.12 Categorias modelo próprias

Em qualquer categoria modelo, cofibrações são fechadas por pushouts e fibrações são fechadas por pullbacks, contudo equivalências fracas não são fechadas por pushouts ou pullbacks em geral. Esta propriedade é bastante desejável em certas construções e resultados da teoria de categorias modelo, dando origem ao conceito de categoria modelo própria.

Definição 1.12.1. *Uma categoria modelo \mathcal{M} é dita ser:*

(a) *própria à esquerda se para qualquer quadrado pushout do tipo*

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array} \text{ com}$$

$f \in \mathcal{W}$ e $g \in \mathcal{K}$, *tem-se que* $f' \in \mathcal{W}$;

(b) *própria à direita se para qualquer quadrado pullback do tipo*

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ \bullet & \xrightarrow{g} & \bullet \end{array} \text{ com } f \in \mathcal{W}$$

e $g \in \mathcal{F}$, *tem-se que* $f' \in \mathcal{W}$;

(c) *própria se for própria à esquerda e à direita.*

Proposição 1.12.2. *Se todos os objetos de \mathcal{M} são:*

(a) *cofibrantes então \mathcal{M} é própria à esquerda;*

(b) *fibrantes então \mathcal{M} é própria à direita.*

Demonstração. Veja Corolário 13.1.3 em [24]. □

As principais categorias modelo são próprias: Top com as estruturas modelo de Quillen e de Hurewicz, top com a estrutura modelo de Quillen, sSet com a estrutura modelo de Quillen e $\text{Ch}_{\mathbb{R}}$ e $\text{Ch}_{\mathbb{R}}^+$ com as estruturas modelo projetivas. Notemos que a única categoria modelo destas em que todos os objetos são bifibrantes é Top com a estrutura modelo de Hurewicz. Para mais detalhes referimos [24].

Capítulo 2

Operadas e álgebras

Este capítulo é uma breve introdução à teoria de operadas e álgebras sobre operadas e destina-se a estabelecer notação e terminologia sobre estes conceitos a serem utilizados no próximo capítulo, onde apresentamos nossos resultados.

Operadas são dispositivos matemáticos usados para descrever estruturas algébricas em categorias monoidais simétricas, pois codificam leis de associatividade e de compatibilidade com unidades. Operadas simétricas codificam leis de comutatividade mas não serão consideradas neste trabalho.

Uma álgebra sobre uma operada é a realização de uma estrutura algébrica no seguinte sentido: monoides ordinários, monoides topológicos, anéis, módulos, DG-álgebras (e outros) são todos exemplos de álgebras sobre operadas (de fato, são álgebras sobre as chamadas operadas associativas em suas categorias monoidais ambiente).

Operadas coloridas e suas álgebras descrevem estruturas algébricas mais gerais em categorias monoidais simétricas. Por exemplo, módulos sobre monoides são álgebras sobre certas operadas bicoloridas.

As seções deste capítulo descrevem operadas, álgebras sobre operadas, exemplos, propriedades categóricas de operadas e suas álgebras, além de importantes adjunções.

A última seção é a mais importante deste capítulo e traz resultados de teoria de homotopia de operadas e álgebras que utilizaremos no próximo capítulo. Tratamos, por exemplo, de resoluções cofibrantes explícitas para operadas topológicas, estruturas modelo em categorias de álgebras sobre operadas e equivalências de Quillen entre elas.

2.1 Operadas e álgebras

Neste capítulo $\mathcal{V} = (\mathcal{V}, \otimes, \mathbb{I}, \alpha, \lambda, \rho, \gamma, [-, -])$ sempre denotará um cosmo, conforme o apêndice A. A definição de operada sobre \mathcal{V} não requer que \mathcal{V} seja fechada e bicompleta, mas muitos resultados e construções valem sob esta hipótese.

Definição 2.1.1. A categoria $\mathcal{V}^{\mathbb{N}}$ será chamada a categoria de coleções (em \mathcal{V}) e denotada por $\text{Coll}(\mathcal{V})$. Uma coleção \mathcal{P} também será denotada por $(\mathcal{P}(n))_{\mathbb{N}}$.

Definição 2.1.2. Uma coleção pontuada (em \mathcal{V}) é uma coleção \mathcal{P} equipada com uma flecha $u : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{P}(1)$ (chamada de unidade ou pontuação). Um morfismo de coleções pontuadas é um morfismo em $\text{Coll}(\mathcal{V})$ que preserva unidade de modo óbvio. A categoria resultante será denotada por $\text{Coll}^{\bullet}(\mathcal{V})$.

Definição 2.1.3. Uma operada (em \mathcal{V}) é uma coleção pontuada \mathcal{P} , com unidade $u : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{P}(1)$, equipada com flechas

$$\zeta = \zeta_{k,n_1,\dots,n_k} : \mathcal{P}(k) \otimes \mathcal{P}(n_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(n_k) \rightarrow \mathcal{P}(n_1 + \dots + n_k) \in \vec{\mathcal{V}},$$

para quaisquer $k \geq 1$ e $n_1, \dots, n_k \geq 0$, de modo que os diagramas abaixo comutam para quaisquer $k \geq 1$, $m \geq 0$, $n_1, \dots, n_k \geq 1$ e $l_1, \dots, l_n \geq 0$, onde $n := n_1 + \dots + n_k$, $g_s := l_1 + \dots + l_s$, $h_s := l_{(g_{s-1}+1)} + \dots + l_{g_s}$ e $l := l_1 + \dots + l_n$.

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\mathcal{P}(k) \otimes \left(\bigotimes_{s=1}^k \mathcal{P}(n_s) \right) \right) \otimes \left(\bigotimes_{r=1}^n \mathcal{P}(l_r) \right) & & \\
 \downarrow \cong & \searrow \zeta \otimes 1 & \\
 & \mathcal{P}(n) \otimes \left(\bigotimes_{r=1}^n \mathcal{P}(l_r) \right) & \\
 & \downarrow \zeta & \\
 & \mathcal{P}(l) & \\
 & \uparrow \zeta & \\
 & \mathcal{P}(k) \otimes \left(\bigotimes_{s=1}^k \mathcal{P}(h_s) \right) & \\
 & \nearrow 1 \otimes (\bigotimes_{s=1}^k \zeta) & \\
 \mathcal{P}(k) \otimes \left(\bigotimes_{s=1}^k \left(\mathcal{P}(n_s) \otimes \left(\bigotimes_{q=1}^{n_s} \mathcal{P}(l_{g_{s-1}+q}) \right) \right) \right) & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{I} \otimes \mathcal{P}(m) & \xrightarrow{u \otimes 1} & \mathcal{P}(1) \otimes \mathcal{P}(m) \\
 \searrow \cong & & \downarrow \zeta \\
 & & \mathcal{P}(m)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}(k) \otimes \mathbb{I}^{\otimes k} & \xrightarrow{1 \otimes u^{\otimes k}} & \mathcal{P}(k) \otimes \mathcal{P}(1)^{\otimes k} \\
 \searrow \cong & & \downarrow \zeta \\
 & & \mathcal{P}(k)
 \end{array}$$

Onde os isomorfismos acima são induzidos da estrutura monoidal simétrica de \mathcal{V} . As flechas ζ são chamadas as composições de \mathcal{P} .

Observação 2.1.4. Uma operada \mathcal{P} em \mathcal{V} pode ser definida equivalentemente como uma coleção pontuada junto com flechas

$$\circ_{n,i,m} = \circ_i : \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(m) \rightarrow \mathcal{P}(n+m-1) \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$$

para quaisquer $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$ e $m \geq 0$ (chamadas de composições parciais de \mathcal{P}) que cumprem axiomas naturais de associatividade e de compatibilidade com unidade (cf. [36, 46]). Operadas definidas via composições totais são também chamadas de operadas de May (cf. [36]) e operadas definidas via composições parciais são também chamadas de operadas de Markl.

Desde que estamos principalmente interessados em operadas topológicas, isto é, operadas no cosmo $\text{top} = (\text{top}, \times, \{*\})$ dos espaços topológicos compactamente gerados (conforme apêndice A), daremos uma definição simplificada nesse caso via elementos. Note que a definição a seguir também descreve operadas em Set . Uma descrição similar pode ser dada em Ch_R ou Ch_R^+ via vetores homogêneos e regra de Koszul (cf. [45]).

Definição 2.1.5. Uma operada topológica é uma coleção \mathcal{P} em top junto com um elemento $u \in \mathcal{P}(1)$, chamado de unidade de \mathcal{P} , e equipada com aplicações contínuas

$$\zeta = \zeta_{k,n_1,\dots,n_k} : \mathcal{P}(k) \times \mathcal{P}(n_1) \times \dots \times \mathcal{P}(n_k) \rightarrow \mathcal{P}(n_1 + \dots + n_k)$$

$$(x, x_1, \dots, x_k) \mapsto x \circ (x_1, \dots, x_k),$$

para quaisquer $k \geq 1$ e $n_1, \dots, n_k \geq 0$ e de modo que

$$(a) \ u \circ x = x \text{ para quaisquer } n \geq 0 \text{ e } x \in \mathcal{P}(n);$$

$$(b) \ x \circ (u, \dots, u) = x \text{ para quaisquer } k \geq 1 \text{ e } x \in \mathcal{P}(k);$$

$$(c)$$

$$\begin{aligned} (x \circ (x_1, \dots, x_k)) \circ (x_1^1, \dots, x_{n_1}^1, \dots, x_1^k, \dots, x_{n_k}^k) &= \\ = x \circ (x_1 \circ (x_1^1, \dots, x_{n_1}^1), \dots, x_k \circ (x_1^k, \dots, x_{n_k}^k)) \end{aligned}$$

para quaisquer $k \geq 1$, $n_1, \dots, n_k \geq 1$, $l_1^1, \dots, l_{n_1}^1, \dots, l_1^k, \dots, l_{n_k}^k \geq 0$, $x \in \mathcal{P}(k)$, $x_i \in \mathcal{P}(n_i)$, $x_m^j \in \mathcal{P}(l_m^j)$.

Exemplo 2.1.6 (A operada endomorfismo). O exemplo protótipo de uma operada topológica é o seguinte. Fixemos um espaço topológico A em top qualquer e consideremos a topologia usual de espaços de funções contínuas em top (cf. [8, 64]). Definimos a operada

topológica End_A por $\text{End}_A(n) := \text{top}(A^n, A)$ para $n \in \mathbb{N}$ (onde $A^0 := \{*\}$) e com unidade $1 : A \rightarrow A$. As composições são definidas de modo natural, para quaisquer índices, aplicações e elementos em que a expressão abaixo faça sentido.

$$f \circ (f_1, \dots, f_k)(x_1^1, \dots, x_{n_1}^1, \dots, x_1^k, \dots, x_{n_k}^k) := f(f_1(x_1^1, \dots, x_{n_1}^1), \dots, f_k(x_1^k, \dots, x_{n_k}^k)).$$

Mais geralmente, qualquer objeto $X \in \mathcal{V}$ define uma operada End_X por $\text{End}_X(n) := [X^{\otimes n}, X]$, onde $[-, -]$ é o funtor hom interno de \mathcal{V} . A operada End_X é chamada de operada endomorfismo sobre X .

Exemplo 2.1.7 (A operada de árvores). Um exemplo de operada em Set é a operada de árvores \mathbb{T} , que apresentamos adiante em sua forma generalizada para árvores coloridas. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{T}(n)$ é o conjunto de (classes de isomorfismo de) árvores com n folhas e as composições são dadas por enxerto de árvores. Esta operada se estende a uma operada topológica de árvores métricas em relação ao enxerto destas com respeito a um comprimento $t \in [0, 1]$ fixado, qualquer. Referimos o apêndice B para mais detalhes.

Exemplo 2.1.8. A operada associativa As em \mathcal{V} é definida por $\text{As}(n) := \mathbb{I}$ para todo $n \geq 0$. As composições de As são induzidas dos isomorfismos $\mathbb{I}^{\otimes r} \simeq \mathbb{I}$ ($r \geq 0$). A operada $\overline{\text{As}}$ em \mathcal{V} é definida como As , exceto por $\overline{\text{As}} := \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0}$ é um objeto inicial em \mathcal{V} . A operada mais simples é a operada inicial \mathfrak{I} , definida como \mathbb{I} para $n = 1$ e como $\mathbf{0}$ caso contrário e com unidade $1_{\mathbb{I}}$. Temos também a operada pontuada \mathfrak{I}_\bullet definida como \mathfrak{I} exceto por $\mathfrak{I}_\bullet(0) := \mathbb{I}$.

Exemplo 2.1.9. Seja $\mathbb{X} = (X, m : X \times X \rightarrow X, u : \mathbb{I} \rightarrow X)$ um monoide em \mathcal{V} . Então \mathbb{X} induz naturalmente uma operada $\mathcal{P}_{\mathbb{X}}$ definida por $\mathcal{P}_{\mathbb{X}}(n) := X$ para todo $n \geq 0$, com unidade u e composições dadas por iterações da multiplicação m . Note que a operada associativa é um caso particular desta construção com respeito a estrutura natural de monoide em \mathbb{I} .

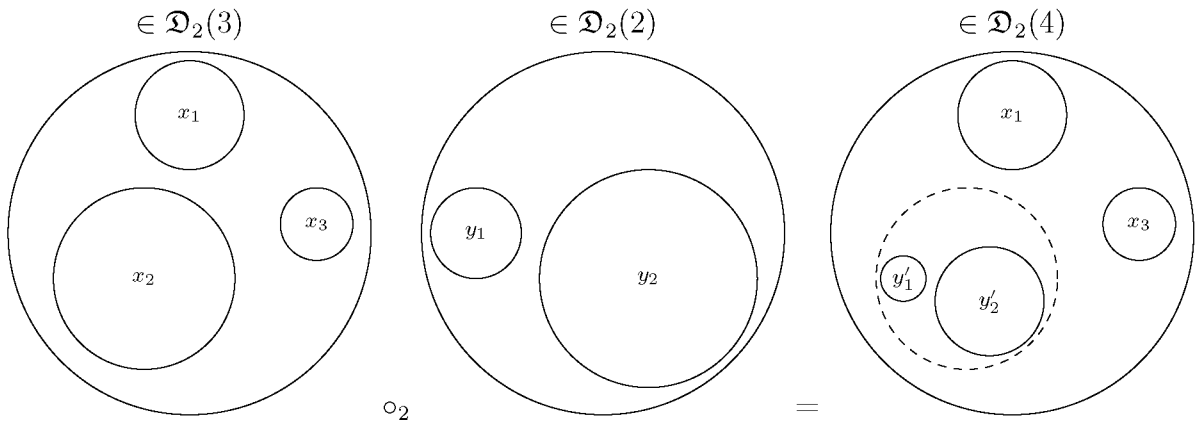
Exemplo 2.1.10. As operadas topológicas \mathbb{WAs} e As_∞ serão definidas no próximo capítulo e desempenham uma papel fundamental neste trabalho. Essencialmente elas são quocientes de operadas de árvores métricas.

A operada dos pequenos discos é devida a Boardman e Vogt (cf. [7, 8]).

Exemplo 2.1.11 (O operada dos pequenos discos). Para cada $x \in \mathbb{R}^2$ e $t > 0$, seja $\mathcal{B}(x, t) \subseteq \mathbb{R}^2$ a bola unitária fechada de centro x e raio t e seja $\mathbb{B} := \mathcal{B}(0, 1)$. A operada topológica \mathfrak{D}_2 é definida como segue: $\mathfrak{D}_2(0) := \emptyset$ e para cada $n \geq 1$:

$$\mathfrak{D}_2(n) := \left\{ (x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{B}^n \times]0, 1]^n; x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j, \mathcal{B}(x_i, t_i) \subseteq \mathbb{B}, \right. \\ \left. \bigcap_{i=1}^n \text{int}(\mathcal{B}(x_i, t_i)) = \emptyset \right\}.$$

A unidade é $(0, 1) \in \mathfrak{D}_2(1)$ e a composição operádica, para quaisquer $n, m \geq 1$ e $1 \leq i \leq n$ é definida mergulhando-se os pequenos discos de $\mathfrak{D}_2(m)$ no i -ésimo pequeno disco de $\mathfrak{D}_2(n)$ (com a ordem definida pelos índices dos centros), conforme sugere a representação abaixo.



Notemos também que operadas topológicas \mathfrak{D}_k podem ser definidas análogamente para qualquer $k \geq 1$. \mathfrak{D}_1 é a operada dos pequenos intervalos.

Definição 2.1.12. Sejam $\mathcal{P} = (\mathcal{P}, u_{\mathcal{P}}, \zeta_{\mathcal{P}})$ e $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}, u_{\mathcal{Q}}, \zeta_{\mathcal{Q}})$ operadas em \mathcal{V} . Um morfismo $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ de operadas é um morfismo de coleções pontuadas tais que para quaisquer $k \geq 1$ e $n_1, \dots, n_k \geq 0$ o diagrama abaixo comuta (onde $n := n_1 + \dots + n_k$).

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(k) \otimes \mathcal{P}(n_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(n_k) & \xrightarrow{\zeta_{\mathcal{P}}} & \mathcal{P}(n) \\ f_k \otimes f_{n_1} \otimes \dots \otimes f_{n_k} \downarrow & & \downarrow f_n \\ \mathcal{Q}(k) \otimes \mathcal{Q}(n_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{Q}(n_k) & \xrightarrow{\zeta_{\mathcal{Q}}} & \mathcal{Q}(n) \end{array}$$

A categoria resultante é denotada por $\text{Op}(\mathcal{V})$.

O objeto inicial em $\text{Op}(\mathcal{V})$ é a operada inicial \mathfrak{I} e o objeto final é a operada associativa As .

A razão de existência de uma operada são suas álgebras.

Definição 2.1.13. *Seja $\mathcal{P} = (\mathcal{P}, u, \zeta)$ uma operada em \mathcal{V} . Uma álgebra sobre \mathcal{P} consiste de um objeto A em \mathcal{V} junto com flechas $\theta_n : \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \rightarrow A \in \vec{\mathcal{V}}$ para todo $n \geq 0$, de modo que os diagramas abaixo comutam para quaisquer $k \geq 1$ e $n_1, \dots, n_k \geq 0$, onde $n := n_1 + \dots + n_k$.*

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\mathcal{P}(k) \otimes \left(\bigotimes_{s=1}^k \mathcal{P}(n_s) \right) \right) \otimes A^{\otimes n} & \xrightarrow{\zeta \otimes 1} & \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \theta_n \\
 \mathcal{P}(k) \otimes \left(\bigotimes_{s=1}^k \mathcal{P}(n_s) \otimes A^{\otimes n_s} \right) & \xrightarrow{1 \otimes \theta_{n_1} \otimes \dots \otimes \theta_{n_k}} & \mathcal{P}(k) \otimes A^{\otimes k} \\
 & & \uparrow \theta_k \\
 & & A
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{I} \otimes A & \xrightarrow{u \otimes 1} & \mathcal{P}(1) \otimes A \\
 & \searrow \cong & \downarrow \theta_1 \\
 & & A
 \end{array}$$

As flechas θ_n são chamadas as operações de A . Um álgebra sobre \mathcal{P} também é chamada de uma \mathcal{P} -álgebra.

Pode-se mostrar que uma \mathcal{P} -álgebra A determina e é determinada por um morfismo de operadas entre \mathcal{P} e End_A . Em particular, para todo objeto X em \mathcal{V} , X é uma álgebra sobre End_X .

Álgebras sobre operadas também podem ser definidas via composições parciais (cf. [26]).

Como antes, álgebras sobre operadas topológicas merecem atenção especial. Por isso simplificamos a definição anterior.

Definição 2.1.14. *Seja $\mathcal{P} = (\mathcal{P}, u, \zeta)$ uma operada topológica. Uma álgebra sobre \mathcal{P} consiste de um espaço topológico A em top junto com uma aplicação contínua*

$$\theta : \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(n) \times A^n \rightarrow A,$$

de modo que:

$$(a) \ \theta(u, a) = a \text{ para qualquer } a \in A;$$

(b)

$$\begin{aligned} \theta(x \circ (x_1, \dots, x_k), a_1^1, \dots, a_{n_1}^1, \dots, a_1^k, \dots, a_{n_k}^k) = \\ = \theta(x, \theta(x_1, a_1^1, \dots, a_{n_1}^1), \dots, \theta(x_k, a_1^k, \dots, a_{n_k}^k)), \end{aligned}$$

para quaisquer $k \geq 1$, $n_1, \dots, n_k \geq 0$, $x \in \mathcal{P}(k)$ e $a_j^i \in A$.

Definição 2.1.15. *Sejam (A, θ^A) e (B, θ^B) álgebras sobre uma operada $\mathcal{P} = (\mathcal{P}, u, \zeta)$ em \mathcal{V} . Um morfismo de álgebras sobre \mathcal{P} é uma flecha $f : A \rightarrow B$ em \mathcal{V} de modo que o diagrama abaixo comuta para todo $n \geq 0$.*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} & \xrightarrow{\theta_n^A} & A \\ 1 \otimes f^{\otimes n} \downarrow & & \downarrow f \\ \mathcal{P}(n) \otimes B^{\otimes n} & \xrightarrow{\theta_n^B} & B \end{array}$$

A categoria resultante será denotada por $\text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{P})$ ou $\text{Alg}(\mathcal{P})$ quando \mathcal{V} estiver subentendida.

Exemplo 2.1.16. *As álgebras sobre a operada associativa As são os monoides em \mathcal{V} . Em categorias monoidais simétricas particulares (neste caso não estamos exigindo fechamento e bicompletude) as álgebras sobre a operada associativa são monoides (usuais de Set), monoides topológicos, monoides simpliciais, monoides de Lie, anéis (associativos com unidade), DG-álgebras (associativas com unidade), etc. Verifica-se que a menos de isomorfismo de categorias, $\text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathfrak{I}) = \mathcal{V}$ e $\text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathfrak{I}_{\bullet}) = (\bullet \downarrow \mathcal{V})$. Em particular, $\text{Alg}_{\text{top}}(\mathfrak{I}_{\bullet})$ é a categoria dos espaços pontuados.*

Exemplo 2.1.17. *Seja \mathbb{X} um monoide em \mathcal{V} . As álgebras sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{X}}$ são os \mathbb{X} -módulos à esquerda, conforme apêndice A. Neste caso recuperamos conceitos usuais como espaços vetoriais, DG-módulos, ações de grupos de Lie, ações topológicas (cuja definição específica é lembrada no próximo capítulo, devido sua importância neste trabalho), etc.*

Imitando o conceito em Set , um semigrupo em uma categoria monoidal consiste de um objeto X equipado com uma flecha $m : X \otimes X \rightarrow X$ que é associativa no mesmo sentido das multiplicações de monoides.

Exemplo 2.1.18. *As álgebras sobre a operada \overline{As} são os semigrupos em \mathcal{V} .*

Exemplo 2.1.19. *As álgebras sobre a operada As_{∞} são os A_{∞} -espaços de Stasheff (cf. [26]) e as álgebras sobre a operada $\mathbb{W}As$ são os $\mathbb{W}\mathfrak{A}$ -espaços de Boardman e Vogt [8].*

2.2 Operadas coloridas e álgebras

Operadas coloridas generalizam operadas e codificam estruturas algébricas mais gerais em \mathcal{V} , estruturas estas que são decodificadas pelas álgebras sobre tais operadas.

De agora em diante C denotará um conjunto não vazio, cujos elementos chamaremos de cores. Associamos a C o conjunto $\underline{C} := \cup_{n \in \mathbb{N}} C^{n+1}$. Um elemento de C^{n+1} é tipicamente denotado por $(c_1, \dots, c_n; c)$, que no caso $n = 0$ significa $(; c)$.

Definição 2.2.1. A categoria $\mathcal{V}^{\underline{C}}$ será chamada a categoria de C -coleções (em \mathcal{V}) e denotada por $\text{Coll}_C(\mathcal{V})$.

Definição 2.2.2. Uma C -coleção pontuada (em \mathcal{V}) é uma C -coleção \mathcal{P} equipada com flechas $u_c : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{P}(c; c)$ (chamadas de unidades ou pontuações) para cada $c \in C$. Um morfismo de C -coleções pontuadas é um morfismo em $\text{Coll}_C(\mathcal{V})$ que preserva unidades de modo óbvio. A categoria resultante será denotada por $\text{Coll}_C^\bullet(\mathcal{V})$.

Convenção 2.2.3. Para qualquer símbolo x e para cada $n \in \mathbb{N}$, escrevemos $x_{\underline{n}}$ para simplificar a expressão x_1, \dots, x_n , que no caso $n = 0$ significa uma expressão vazia.

Definição 2.2.4. Uma operada C -colorida (em \mathcal{V}) é uma C -coleção pontuada \mathcal{P} equipada com flechas

$$\zeta : \mathcal{P}(c_{\underline{n}}; c) \otimes \mathcal{P}(d_{\underline{k}_1}^1; c_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(d_{\underline{k}_n}^n; c_n) \rightarrow \mathcal{P}(d_{\underline{k}_1}^1, d_{\underline{k}_2}^2, \dots, d_{\underline{k}_n}^n; c) \in \overrightarrow{\mathcal{V}},$$

para cada $n \geq 1$, para cada $(n+1)$ -upla de cores $(c_{\underline{n}}; c)$ e para quaisquer uplas de cores $(d_{\underline{k}_1}^1), (d_{\underline{k}_2}^2), \dots, (d_{\underline{k}_n}^n)$, que cumprem axiomas naturais de associatividade e de unidades (cf. [16, 33]), similares ao caso de operadas. As flechas ζ são chamadas as composições de \mathcal{P} .

Observação 2.2.5. Operadas coloridas (em \mathcal{V}) são, em linguagem geral de teoria de categorias, multicategorias pequenas enriquecidas sobre \mathcal{V} (cf. [33]). Toda operada pode ser vista como uma operada C -colorida com C unitário. As cores de uma operada colorida são seus objetos quando vista como uma multicategoria e uma operada é uma multicategoria com apenas um objeto. Operadas C -coloridas também são chamadas de C -operadas.

Definição 2.2.6. Morfismos de C -operadas são definidos de forma similar ao caso de operadas e a categoria resultante é denotada por $\text{Op}_C(\mathcal{V})$.

Definição 2.2.7. Seja \mathcal{P} uma C -operada em \mathcal{V} . Uma álgebra sobre \mathcal{P} consiste de objetos $A(c)$ em \mathcal{V} para cada $c \in C$ e flechas $\theta = \theta_{(c_{\underline{n}}; c)} : \mathcal{P}(c_{\underline{n}}; c) \otimes A(c_1) \otimes \dots \otimes A(c_n) \rightarrow A(c) \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ para cada $(c_{\underline{n}}; c) \in \underline{C}$ que são compatíveis com as unidades e as composições de \mathcal{P} , similarmente ao caso de álgebras sobre operadas. As flechas θ são chamadas as operações de A .

Definição 2.2.8. *Morfismos de álgebras sobre C-operadas são definidos de forma similar ao caso de álgebras sobre operadas e a categoria resultante também é denotada por $\text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{P})$ ou $\text{Alg}(\mathcal{P})$ quando \mathcal{V} estiver subentendida.*

Observação 2.2.9. *Operadas coloridas também podem ser definidas via composições parciais. Referimos o exemplo da operada de C-árvores abaixo. O leitor interessado pode dar definições simplificadas de operadas topológicas coloridas e de suas álgebras via elementos.*

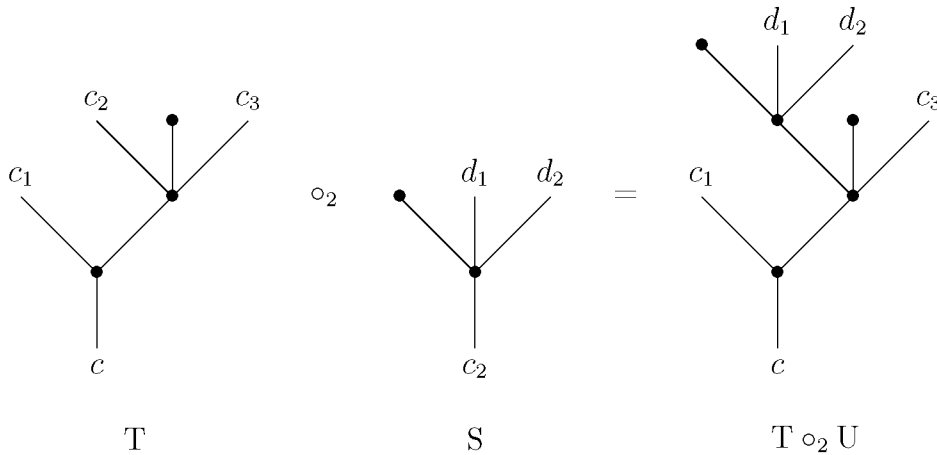
A operada endomorfismo se estende ao caso de operadas coloridas. Seja $A = (A(c))_C \in \mathcal{V}^C$. A operada endomorfismo sobre A é denotada por End_A e definida, para cada $(c_{\underline{n}}; c) \in \underline{C}$, por $\text{End}_A(c_{\underline{n}}; c) := [A(c_1) \otimes \dots \otimes A(c_n), A(c)]$. Novamente uma álgebra A sobre uma C-operada \mathcal{P} determinada e é determinada por um morfismo de operadas entre \mathcal{P} e End_A .

Exemplo 2.2.10 (A operada de árvores coloridas). *A operada colorida \mathbb{T} de C-árvores em Set é definida como segue. Referimos o Apêndice B para definições e notações envolvendo árvores.*

Se $(c_{\underline{n}}; c) \in \underline{C}$, então $\mathbb{T}(c_{\underline{n}}; c) = \mathcal{T}_{(c_{\underline{n}}; c)}$ e para cada $c \in C$ a unidade em $\mathcal{T}_{(c; c)}$ é (classe de isomorfismo da) c-árvore trivial.

Para cada $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$ e $(c_{\underline{n}}; c), (d_{\underline{m}}; c_i) \in \underline{C}$ a composição operádica é induzida pela operação de enxerto de C-árvores em classes de isomorfismo.

$$\begin{aligned} \circ_i : \mathcal{T}_{(c_{\underline{n}}; c)} \times \mathcal{T}_{(d_{\underline{m}}; c_i)} &\rightarrow \mathcal{T}_{(c_1, \dots, c_{i-1}, d_1, \dots, d_m, c_{i+1}, \dots, c_n; c)} \\ (T, S) &\mapsto T \circ_i S. \end{aligned}$$



Exemplo 2.2.11. *Seja $\{\mathfrak{c}, \mathfrak{o}\}$ um conjunto. As $\{\mathfrak{c}, \mathfrak{o}\}$ -operadas topológicas Act , $\overline{\text{Act}}$, Act_{∞} e WAct são definidas no próximo capítulo e são as operadas mais importantes deste trabalho.*

Exemplo 2.2.12. A operada topológica bicolorida Act pode ser generalizada para qualquer categoria monoidal simétrica com um objeto inicial. Suas álgebras são ações (à esquerda) de monoides quaisquer (cf. [5]). Portanto as álgebras sobre Act em top são as ações topológicas (ações à esquerda de monoides topológicos).

2.3 (Co)limites e adjunções

Seguem alguns resultados importantes sobre categorias de C -operadas e de álgebras. Nesta seção a hipótese de \mathcal{V} ser um cosmo é de fato necessária.

Seja $\mathcal{U} : \text{Op}_C(\mathcal{V}) \rightarrow \text{Coll}_C(\mathcal{V})$ o funtor esquecimento. Existe um funtor livre $\mathcal{F} : \text{Coll}_C(\mathcal{V}) \rightarrow \text{Op}_C(\mathcal{V})$, definido no Apêndice C, formando a adjunção livre-esquecimento. Para mais detalhes referimos [5, 18].

$$\mathcal{F} : \text{Coll}_C(\mathcal{V}) \rightleftarrows \text{Op}_C(\mathcal{V}) : \mathcal{U}.$$

Seja \mathcal{P} uma C -operada em \mathcal{V} e seja $\mathcal{U}_{\mathcal{P}} : \text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{V}^C$ o funtor esquecimento. Existe um funtor livre $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} : \mathcal{V}^C \rightarrow \text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{P})$, esboçado abaixo, formando a adjunção livre-esquecimento. Para mais detalhes referimos [18].

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}} : \mathcal{V}^C \rightleftarrows \text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{P}) : \mathcal{U}_{\mathcal{P}}.$$

Para cada $\mathcal{P} \in |\text{Op}_C(\mathcal{V})|$ e $A = (A(c))_C \in |\mathcal{V}^C|$, a \mathcal{P} -álgebra livre sobre A , denotada por $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}A$, é definida, para cada $c \in C$, por

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}A(c) := \coprod_{n \geq 0, c_i \in C} \mathcal{P}(c_n; c) \otimes A^{\otimes c_n}$$

Onde $A^{\otimes c_n} := A_{c_1} \otimes \dots \otimes A_{c_n}$ para $n \geq 1$ e $A^{\otimes c_0} := \mathbb{I}$.

Para cada $(c_n, c) \in \underline{C}$, a flecha

$$\mu_{(c_n; c)} : \mathcal{P}(c_n, c) \otimes (\mathcal{F}_{\mathcal{P}}A)^{\otimes c_n} \rightarrow \mathcal{F}_{\mathcal{P}}A(c)$$

é definida como a composta abaixo.

$$\begin{array}{c} \mathcal{P}(c_n, c) \otimes \left(\coprod_{j_1 \geq 0, d_{i_1}^1 \in C} \mathcal{P}(d_{j_1}^1; c_1) \otimes A^{\otimes d_{j_1}^1} \right) \otimes \dots \otimes \left(\coprod_{j_n \geq 0, d_{i_n}^n \in C} \mathcal{P}(d_{j_n}^n; c_n) \otimes A^{\otimes d_{j_n}^n} \right) \\ \downarrow \simeq \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\coprod_{1 \leq k \leq n, j_k \geq 0, c_{j_k}^k \in C} \mathcal{P}(c_n, c) \otimes \mathcal{P}(d_{j_1}^1; c_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{P}(d_{j_n}^n; c_n) \otimes A^{\otimes d_{j_1}^1, \dots, d_{j_n}^n} \\
\downarrow \bigoplus \zeta \otimes 1 \\
\coprod_{r \geq 0, b_i \in C} \mathcal{P}(b_r, c) \otimes A^{\otimes b_r}
\end{array}$$

Onde a primeira flecha é um isomorfismo induzido da estrutura monoidal fechada de \mathcal{V} .

Os próximos dois resultados listam algumas propriedades categóricas das categorias de operadas e de sua álgebras. As demonstrações pode ser encontradas em [18].

Proposição 2.3.1. *O funtor esquecimento $\mathcal{U} : \text{Op}_C(\mathcal{V}) \rightarrow \text{Coll}(\mathcal{V})$ cria limites e colimites filtrados; cria também coequalizadores que são reflexivos em $\text{Coll}(\mathcal{V})$. Portanto a categoria $\text{Op}_C(\mathcal{V})$ é bicompleta.*

Proposição 2.3.2. *Seja $\mathcal{P} \in |\text{Op}_C(\mathcal{V})|$. O funtor esquecimento $\mathcal{U} : \text{Op}_C(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{V}^C$ cria limites e colimites filtrados; cria também coequalizadores que são reflexivos em \mathcal{V}^C . Portanto a categoria $\text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{P})$ é bicompleta.*

2.4 A adjunção extensão-restrição

Todo morfismo de operadas induz uma importante adjunção de categorias de álgebras, especialmente útil em teoria de homotopia de operadas.

Seja $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q} \in \overrightarrow{\text{Op}_C(\mathcal{V})}$. Então φ induz um funtor $\varphi^* : \text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{Q}) \rightarrow \text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{P})$ definido como segue:

(a) se $(A(c))_C$ é uma \mathcal{Q} -álgebra com operações $(\theta_{(c_n; c)})_{\underline{C}}$ então $(A(c))_C$ é uma \mathcal{P} -álgebra com operações $(\theta_{(c_n; c)} \circ (f_{(c_n; c)} \otimes 1_{A^{c_n}}))_{\underline{C}}$;

(b) se f é um morfismo de \mathcal{Q} -álgebras então f é um morfismo de \mathcal{P} -álgebras com respeito às operações determinadas por φ .

De modo simplificado dizemos que φ^* identifica objetos (subjacentes) e morfismos e deforma operações.

Vejamos como simplificar a definição anterior. Se A é uma \mathcal{Q} -álgebra, então ela é determinada por um morfismo de operadas $g : \mathcal{Q} \rightarrow \text{End}_A$, logo $gf : \mathcal{P} \rightarrow \text{End}_A$ determina uma estrutura de \mathcal{P} -álgebra em A .

Por razões gerais, o funtor $\varphi^* : \text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{Q}) \rightarrow \text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{P})$ possui um funtor adjunto à esquerda, denotado por $\varphi_! : \text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{Q})$ (cf. [5, 18]).

Definição 2.4.1. *Seja $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q} \in \overrightarrow{\text{Op}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})}$. Os funtores $\varphi_! : \text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{Q})$ e $\varphi^* : \text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{Q}) \rightarrow \text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{P})$ são chamados, respectivamente, o funtor extensão e o funtor restrição induzido por φ e eles formam a adjunção extensão-restrição induzida por φ .*

$$\varphi_! : \text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{P}) \rightleftarrows \text{Alg}_{\mathcal{V}}(\mathcal{Q}) : \varphi^*.$$

Os termos restrição e extensão são derivados dos conceitos usuais de restrição e extensão de escalares para módulos ordinários. De fato, considere a categoria monoidal simétrica dos grupos abelianos $\text{Ab} = (\text{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$. Um monoide em Ab é um anel (associativo com unidade), logo, se R é um anel então \mathcal{P}_R é uma operada em Ab e $\text{Alg}(\mathcal{P}_R)$ é então a categoria dos R -módulos. Finalmente, um morfismo de anéis $f : R \rightarrow S$ induz um morfismo de operadas $f : \mathcal{P}_R \rightarrow \mathcal{P}_S$. Os detalhes adicionais ficam por conta do leitor interessado.

2.5 Teoria de homotopia para operadas e álgebras

Nesta última seção reunimos brevemente definições e resultados envolvendo teoria de homotopia para operadas e álgebras sobre operadas, a fim de iniciarmos nosso estudo sobre A_{∞} -ações e h -ações a luz de categorias modelo no próximo capítulo. Mais detalhes sobre o conteúdo desta seção podem ser encontrados, por exemplo, em [4, 5, 6].

Salientamos que as definições desta seção não necessitam que a categoria de operadas sobre \mathcal{V} carregue uma estrutura modelo, nem que uma tal estrutura exista. As definições e os resultados desta seção valem para um conjunto de cores \mathcal{C} qualquer, bem como para operadas clássicas, que podem ser vistas como operadas como uma só cor.

As próximas três definições nos permitem enunciar uma estrutura modelo na categoria de operadas topológicas e obter um critério para determinação explícita de resoluções cofibrantes destas.

Nesta seção e no capítulo 3 as notações $|\mathcal{C}|$ e $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ serão denotadas igualmente por \mathcal{C} para qualquer categoria \mathcal{C} .

Definição 2.5.1. *Seja \mathcal{V} uma categoria modelo monoidal e seja $\mathcal{P} \in \text{Op}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$. Dizemos que \mathcal{P} é Σ -cofibrante se $\mathcal{P}(c_{\underline{n}}; c)$ é cofibrante em \mathcal{V} para cada $(c_{\underline{n}}; c) \in \underline{\mathcal{C}}$.*

Definição 2.5.2. *Seja \mathcal{V} uma categoria modelo monoidal e seja $\mathcal{P} \in \text{Op}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$. Dizemos que \mathcal{P} é bem pontuada se para cada $c \in \mathcal{C}$ a unidade $u_c : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{P}(c; c)$ é uma cofibração em \mathcal{V} .*

Definição 2.5.3. *Seja \mathcal{V} uma categoria modelo monoidal e seja $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q} \in \text{Op}_C(\mathcal{V})$. Dizemos que f é uma Σ -equivalência fraca se $f_{(c_n; c)} : \mathcal{P}(c_n; c) \rightarrow \mathcal{Q}(c_n; c)$ é uma equivalência fraca em \mathcal{V} para cada $(c_n; c) \in \underline{C}$. As definições de Σ -fibrações e Σ -fibrações acíclicas em $\text{Op}_C(\mathcal{V})$ são análogas.*

O próximo resultado é importante pois mune a categoria de operadas topológicas (para qualquer conjunto de cores C) com uma estrutura modelo, e por isso podemos estudar formalmente conceitos homotópicos nesta categoria.

Teorema 2.5.4. *A categoria $\text{Op}_C(\text{top})$ possui uma estrutura modelo onde as equivalências fracas são as Σ -equivalências fracas e as fibrações são as Σ -fibrações.*

Demonstração. Este resultado é um caso particular do Teorema 3.2 em [4] para top . O mesmo resultado também vale, por exemplo, para $\text{Op}_C(\text{sSet})$. \square

Segue do teorema anterior que toda C -operada topológica é fibrante, que as fibrações acíclicas em $\text{Op}_C(\mathcal{V})$ são as Σ -fibrações acíclicas e que as adjunções livre-esquecimento abaixo são adjunções de Quillen.

$$\mathcal{F} : \text{Coll}_C(\text{top}) \rightleftarrows \text{Op}_C(\text{top}) : \mathcal{U}.$$

$$\mathcal{F}^\bullet : \text{Coll}_C^\bullet(\text{top}) \rightleftarrows \text{Op}_C(\text{top}) : \mathcal{U}^\bullet.$$

Referimos o Apêndice C para as adjunções acima.

Qualquer referência a conceitos de categorias modelo em $\text{Op}_C(\text{top})$ será com respeito a estrutura modelo definida no teorema anterior. O próximo resultado é muito importante pois fornece um procedimento explícito para a determinação de resoluções cofibrantes de operadas topológicas. Esta é a principal propriedade (e finalidade) da \mathbb{W} -construção de Boardman e Vogt [8], embora eles não usassem linguagem de categorias modelo no trabalho referido.

Teorema 2.5.5. *Seja $\mathcal{P} \in \text{Op}_C(\text{top})$ tal que \mathcal{P} é Σ -cofibrante e bem pontuada. Então $\mathbb{W}\mathcal{P}$ é uma resolução cofibrante para \mathcal{P} , isto é, $\mathbb{W}\mathcal{P}$ é uma operada cofibrante e existe uma equivalência fraca $\gamma : \mathbb{W}\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \in \text{Op}(\text{top})$.*

Demonstração. Este resultado é um caso particular do teorema 3.5 em [5] para top , porém existe uma sutileza, no referido teorema as Σ -equivalências fracas e as Σ -fibrações não necessariamente definem uma estrutura modelo em $\text{Op}_C(\mathcal{V})$ e os conceitos de equivalência fraca e cofibração utilizados lá são com respeito às classes mencionadas. Por isso no caso particular $\mathcal{V} = \text{top}$, o Teorema 3.5 de [5] é totalmente honesto com a teoria de categorias modelo. \square

Definição 2.5.6. *Sejam \mathcal{V} uma categoria modelo monoidal, $\mathcal{P} \in \text{Op}_{\mathcal{C}}(\mathcal{V})$ e $f : A \rightarrow B \in \text{Alg}(\mathcal{P})$. Dizemos que f é uma Σ -equivalência fraca se $f_c : A(c) \rightarrow B(c)$ é uma equivalência fraca em \mathcal{V} para cada $c \in \mathcal{C}$. As definições de Σ -fibrações e Σ -fibrações acíclicas em $\text{Alg}(\mathcal{P})$ são análogas.*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}} : \mathcal{V}^{\mathcal{C}} \rightleftharpoons \text{Alg}(\mathcal{P}) : \mathcal{U}_{\mathcal{P}}$$

Para a próxima definição lembremos que em qualquer categoria monoidal \mathcal{V} , a unidade monoidal \mathbb{I} e $\mathbb{I} \amalg \mathbb{I}$ possuem estruturas naturais de comonoides e que a codiagonal $1 \amalg 1 : \mathbb{I} \amalg \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$ é um morfismo de comonoides. As definições que seguem preparam o terreno para darmos um critério para uma operada ser admissível.

[illegible]

Definição 2.5.10. *Uma resolução fibrante funtorial em uma categoria modelo \mathcal{M} é um funtor coaumentado (F, η) tal que $(FA, \eta_A : A \rightarrow FA)$ é uma resolução fibrante de A para todo $A \in \mathcal{M}$.*

O próximo resultado fornece condições suficientes para uma operada ser admissível.

Teorema 2.5.11. *Seja \mathcal{V} uma categoria modelo monoidal, cofibrantemente gerada, com unidade monoidal cofibrante e com uma resolução fibrante funtorial monoidal simétrica. Se \mathcal{V} tem um intervalo comonoide, então toda C-operada é admissível.*

Demonstração. Veja Teorema 2.1 em [5]. □

Este resultado se aplica para importantes categorias tais como a categoria dos conjuntos simpliciais, a categoria dos complexos de cadeias e para top (conforme afirmado sem verificação em [5]). Provaremos este resultado para top por ser de nosso interesse e não por haver detalhes na literatura.

O resultado abaixo diz que a categoria de álgebras sobre uma operada topológica qualquer admite uma estrutura modelo natural, onde equivalências fracas e fibrações são definidas para cada cor em como em top .

Referimos a seção do capítulo 1 sobre categorias modelo cofibrantemente geradas para as notações e terminologias utilizadas na demonstração abaixo.

Teorema 2.5.12. *Seja $\mathcal{P} \in \text{Op}_C(\text{top})$. Então \mathcal{P} é admissível.*

Demonstração. Desde que $\mathbb{S}^{-1} \hookrightarrow \mathbb{D}^0$ é uma cofibração de Quillen geradora, qualquer espaço unitário é cofibrante. Desde que qualquer espaço é fibrante, o par $(1_{\text{top}}, 1_{\text{top}})$ é trivialmente uma resolução fibrante funtorial monoidal simétrica. Desde que a estrutura monoidal considerada em top é a cartesiana, qualquer espaço tem uma única estrutura de comonoide e qualquer aplicação contínua entre espaços é necessariamente um morfismo de comonoides.

Considere a fatoração $\{*\} \coprod \{*\} \rightarrow [0, 1] \rightarrow \{*\}$ onde a primeira aplicação é definida por $*_0 \mapsto 0, *_1 \mapsto 1$. A segunda aplicação é em particular uma equivalência homotópica fraca porque $[0, 1]$ é contrátil. A primeira aplicação é uma cofibração de Quillen porque ela é isomorfa à cofibração de Quillen geradora $\mathbb{S}^0 \hookrightarrow \mathbb{D}^1$, e então $[0, 1]$ é um comonoide intervalo em top . O resultado segue então do teorema 3.0.1 do próximo capítulo e do teorema anterior. □

Uma vez que temos estruturas modelos entre duas categorias de álgebras sobre operadas, é natural investigar o relacionamento homotópico destas categorias. O próximo resultado é uma ferramenta poderosa para tal fim e será o principal resultado que usaremos para comparar ações topológicas, A_∞ -ações e h-ações.

Teorema 2.5.13. *Seja \mathcal{V} categoria modelo monoidal, cofibrantemente gerada, própria à esquerda e com unidade cofibrante. Seja $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q} \in \text{Op}_C(\mathcal{V})$. Suponha que φ é uma Σ -equivalência fraca e que \mathcal{P} e \mathcal{Q} são operadas admissíveis Σ -cofibrantes e bem pontuadas. Então a adjunção extensão-restrição*

$$\varphi_! : \text{Alg}(\mathcal{P}) \rightleftarrows \text{Alg}(\mathcal{Q}) : \varphi^*$$

é uma equivalência de Quillen.

Demonstração. Veja Teorema 4.1 em [5].

□

Capítulo 3

Ações homotópicas

Neste capítulo nós apresentamos os resultados deste trabalho.

Na primeira seção nós definimos A_∞ -ações seguindo [26], introduzimos ações homotópicas, doravante chamadas h-ações, como uma extensão natural do conceito de $W\mathcal{U}$ -espaço de Boardman e Vogt [8] e observamos que as categorias de ações podem ser vistas como categorias de álgebras sobre operadas, o que será essencial para o estudo e comparação destes conceitos via teoria de categorias modelo. Nós também justificamos parcialmente o porquê de A_∞ -ações e h-ações serem chamadas de ações topológicas a menos de homotopia.

Na segunda seção nós mostramos diversos resultados de comparação que confirmam em linguagem formal que A_∞ -ações e h-ações são homotopicamente indistintas de ações topológicas. Mais precisamente nós mostramos que as categorias

$$\mathrm{Alg}(\mathrm{Act}), \mathrm{Alg}(\mathbb{W}\mathrm{Act}) \text{ e } \mathrm{Alg}(\mathrm{Act}_\infty)$$

são todas Quillen equivalentes e portanto possuem categorias homotópicas equivalentes. Após isso, nós entramos em uma questão mais aprofundada do porquê A_∞ -ações não são totalmente adequadas para substituírem ações topológicas em teoria de homotopia e o principal resultado que mostramos nesta direção é que a operada topológica Act_∞ não é cofibrante. Em contrapartida mostramos que a operada $\mathbb{W}\mathrm{Act}$ é uma resolução cofibrante de Act , mostrando que h-ações são ações topológicas a menos de homotopia no sentido de Berger e Moerdijk [4, 5].

Mostramos que a operada topológica Act não é cofibrante a fim de salientarmos a importância da sua resolução cofibrante $\mathbb{W}\mathrm{Act}$ e mostramos que existe um morfismo de operadas $\xi : \mathbb{W}\mathrm{Act} \rightarrow \mathrm{Act}_\infty$, o que, em particular, implica que toda A_∞ -ação tem uma estrutura natural de h-ação. Ademais a correspondência dada por ξ será essencial em nossos resultados de comparações de retificações.

Mostramos também alguns resultados de não existência tais como: não existem morfismos de operadas entre Act_∞ e $\mathbb{W}\text{Act}$, Act e Act_∞ e entre Act e $\mathbb{W}\text{Act}$.

Na terceira seção nós propomos uma formalização do conceito de retificação de álgebras sobre operadas e aplicamos esse conceito para retificações de h -ações e A_∞ -ações. Ainda nesta seção daremos um primeiro exemplo de retificação de h -ações calculando explicitamente o funtor extensão

$$\varphi_! : \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}) \rightarrow \text{Alg}(\text{Act}),$$

que chamaremos de retificação de Berger-Moerdijk ou retificação \mathcal{BM} . Mostraremos que a retificação \mathcal{BM} de uma h -ação cofibrante (X, Y) é efetiva no sentido de (X, Y) ser isomorfo a $\varphi_!(X, Y)$ na categoria homotópica de $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$.

Na quarta seção nós construímos outro exemplo de retificação de h -ações, que será importante nos resultados finais deste trabalho. Esta retificação será denotada pelo funtor

$$\Phi : \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}) \rightarrow \text{Alg}(\text{Act})$$

e chamada de retificação de Boardman-Vogt ou retificação \mathcal{BV} . Mostraremos que a retificação \mathcal{BV} de uma h -ação qualquer (X, Y) é ótima no sentido de (X, Y) ser homotopicamente equivalente a $\Phi(X, Y)$ em $\text{top} \times \text{top}$.

Na quinta seção nós comparamos as retificações \mathcal{BM} e \mathcal{BV} e mostramos que existe um transformação natural $\theta : \Phi \rightarrow \varphi_!$ tal que para qualquer h -ação cofibrante (X, Y) , $\Phi(X, Y)$ e $\varphi^*(X, Y)$ são homotopicamente idênticas.

Na sexta seção descrevemos brevemente a retificação que chamaremos de retificação \mathcal{HLS} , para compará-la com as retificações já citadas. Tal retificação é dada em [26] e associa a cada A_∞ -ação uma ação topológica dada por um espaço de laços agindo em um espaço de laços relativos.

Na sétima seção nós comparamos as três retificações via zig-zags de equivalências homotópicas fracas.

Na última seção nós daremos duas extensões parciais para h -ações do teorema de reconhecimento de espaços relativos de [26], dado para A_∞ -ações. Na primeira usamos a retificação \mathcal{BM} mas requeremos hipótese de cofibrância de h -ações. Na segunda usamos a retificação \mathcal{BV} sem requerer hipótese de cofibrância, porém não asseguramos que a correspondência seja dada por um morfismo A_∞ -equivariante.

No que segue nós fixamos algumas notações, convenções, terminologias e resultados que serão utilizados ao longo deste capítulo.

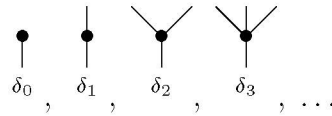
(a) Espaço topológicos serão chamados apenas de espaços;

(b) Trabalharemos sobre a categoria top dos espaços compactamente gerados (no sentido de [8]) e assim, por exemplo, produtos de espaços e topologias de espaços de funções serão considerados com respeito a essa categoria. Desde que $[0, 1]$ é um espaço de Hausdorff localmente compacto, produtos de espaços em top com $[0, 1]$ coincidem com produtos em Top e assim os conceitos usuais de homotopia se comportam bem em top , assim como grupos de homotopia e homologia por exemplo. Para mais detalhes referimos o apêndice de [8] ou [64];

(c) Em top consideramos a estrutura monoidal cartesiana $(\text{top}, \times, \{*\})$, onde $\{*\}$ é um espaço unitário fixado;

(d) Lembremos que para qualquer símbolo x e $n \geq 1$, x_n significa x_1, \dots, x_n , enquanto que x_0 significa uma expressão vazia;

(e) Para cada $n \in \mathbb{N}$, δ_n denotará a n -corola, isto é, a (classe de isomorfismo) da árvore com exatamente um vértice interno e n folhas;



(f) Em top nós consideramos a estrutura modelo de Quillen (cf. [24, 25, 28, 49]), onde as equivalências fracas são as equivalências homotópicas fracas, as fibrações são as fibrações de Serre e as cofibrações (chamadas cofibrações de Quillen) são retratos de extensões celulares (conforme capítulo 1) das inclusões (de esferas em discos) em $\{\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{D}^n; n \in \mathbb{N}\}$;

(g) Precisaremos do seguinte resultado, o qual é uma compilação de resultados bem conhecidos em top .

Teorema 3.0.1. *top é uma categoria modelo monoidal, cofibrantemente gerada e própria. Além disso todos os objetos em top são fibrantes e a classe de objetos cofibrantes contém a classe de retratos de CW-complexos.*

Demonstração. Uma prova detalhada de que top é cofibrantemente gerada pode ser encontrada em [25]. A compatibilidade com a estrutura monoidal pode ser encontrada em [29]. A prova de que top é própria pode ser encontrada em [24]. A verificação que todos os espaços são fibrantes é trivial. O Exemplo 3.3 de [25] implica que retratos de CW-complexos são objetos cofibrantes. \square

(h) Desde que ações topológicas estão entre os principais conceitos deste trabalho, nós formalizamos a definição abaixo.

Definição 3.0.2. *Uma ação topológica consiste de um monoide topológico agindo à esquerda de um espaço, isto é, consiste de espaços X e Y juntamente com um elemento $e \in X$ (chamado de unidade) e aplicações contínuas*

$$M : X \times X \rightarrow X \text{ , } L : X \times Y \rightarrow Y$$

chamadas respectivamente de multiplicação e ação, de modo que para quaisquer $a, b, c \in X$ e $y \in Y$ tenha-se:

$$(a) \quad ex = x,$$

$$(b) \quad xe = x,$$

$$(c) \quad e.y = y,$$

$$(d) \quad (ab)c = a(bc),$$

$$(e) \quad (ab).y = a.(b.y),$$

onde escrevemos $M(a, b) := ab$ e $L(a, y) := a.y$ para quaisquer $a, b \in X$ e $y \in Y$. Dizemos que a ação L é associativa no sentido de (e). Uma ação topológica é denotada por (X, Y, M, e, L) ou apenas por (X, Y) quando for conveniente. Ações topológicas formam uma categoria cujos morfismos são chamados de morfismos equivariantes e definidos de modo natural.

3.1 A_∞ -ações e h-ações

Nesta seção nós definimos A_∞ -ações e h-ações, os principais objetos de estudo deste trabalho. Uma A_∞ -ação consiste de um A_∞ -espaço X agindo homotopicamente em um espaço Y em um sentido que formalizaremos adiante. Desde que a categoria dos A_∞ -espaços é uma subcategoria plena da categoria das A_∞ -ações via identificação $X \mapsto (X, *)$, então dizemos que uma A_∞ -ação é uma extensão natural do conceito de A_∞ -espaço de Stasheff [55].

Uma h-ação por sua vez é uma extensão natural do conceito de $W\mathfrak{U}$ -espaço de Boardman e Vogt [8] no mesmo sentido do relacionamento entre A_∞ -espaços e A_∞ -ações. Veremos que uma h-ação é o correspondente adequado de uma ação topológica em teoria de homotopia.

O que essencialmente distingue A_∞ -ações de h-ações é o requerimento de uma multiplicação com unidade estrita no primeiro caso. Parte deste trabalho se destina a comparar estes dois conceitos e explicar a luz de categorias modelo porque o primeiro conceito não é completamente adequado do ponto de vista homotópico.

Começemos com as definições das operadas topológicas associadas aos conceitos desta seção, lembrando inclusive a definição da operada associativa As em top , cujas álgebras são os monoides topológicos. Em todos os casos abaixo a estrutura de operada é trivial.

Definição 3.1.1. As operadas topológicas As e \overline{As} são definidas como segue:

$$(a) \quad As(n) := \{*\} \text{ para cada } n \in \mathbb{N};$$

$$(b) \quad \overline{As} \text{ é definida como } As \text{ exceto por } \overline{As}(0) := \emptyset.$$

Considere um conjunto com duas cores $\{\mathfrak{c}, \mathfrak{o}\}$. As operadas topológicas $\{\mathfrak{c}, \mathfrak{o}\}$ -coloridas Act e $\overline{\text{Act}}$ são definidas como segue.

(c) Para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$ definimos $\text{Act}(n; \mathfrak{c}) := \{*\}$, $\text{Act}(m, \mathfrak{o}; \mathfrak{o}) := \{*\}$ e para todas as demais uplas de cores a componente de Act é o conjunto vazio, onde n e m denotam o número de cores iguais a \mathfrak{c} , por exemplo, $\text{Act}(0; \mathfrak{c}) = \text{Act}(\cdot; \mathfrak{c})$ e $\text{Act}(2, \mathfrak{o}; \mathfrak{o}) = \text{Act}(\mathfrak{c}, \mathfrak{c}, \mathfrak{o}; \mathfrak{o})$.

(d) $\overline{\text{Act}}$ é definida como Act exceto por $\overline{\text{Act}}(\cdot; \mathfrak{c}) := \emptyset$.

Desde que estudaremos ações topológicas do ponto de vista de teoria de homotopia de álgebras sobre operadas, formalizamos o seguinte resultado.

Proposição 3.1.2. *A categoria das ações topológicas é isomorfa à $\text{Alg}(\text{Act})$.*

Demonstração. A unidade, a multiplicação e a ação de uma ação topológica determinam e são determinadas por uma estrutura de álgebra sobre a operada Act . O resultado segue por inspeção direta. \square

A fim de definirmos A_∞ -ações e h -ações precisamos lançar mão da \mathbb{W} -construção de Boardman e Vogt [8] e, portanto, da linguagem de árvores. Os detalhes destes dois conceitos podem ser encontrados nos apêndices B e C.

No momento lembremos apenas que em nosso trabalho uma árvore significa um grafo (simples), acíclico, conexo, planar, com ao menos dois vértices e equipado com um vértice de grau 1 chamado de raiz e um conjunto de vértices de grau 1, sem a raiz, chamados de folhas. A aresta incidente à raiz é chamada de tronco e uma aresta incidente a uma folha é chamada de um galho. Uma aresta que não é o tronco nem um galho é chamada de interna e um vértice que não é a raiz nem uma folha é chamado de interno. Um fruto é um vértice interno de grau 1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{T}_n denota o conjunto de classes de isomorfismo de árvores com n folhas.

Para cada conjunto de cores C , a \mathbb{W} -construção consiste de um endofuntor $\mathbb{W} : \text{Op}_C(\text{top}) \rightarrow \text{Op}_C(\text{top})$ junto com uma transformação natural $\Upsilon : \mathbb{W} \rightarrow 1$ que sob certas hipóteses determina uma resolução cofibrante para operadas topológicas, conforme capítulo 2 e apêndice C.

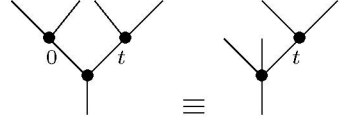
No que segue, se τ é uma árvore então $|\tau|$ denota o seu número de arestas internas.

A \mathbb{W} -construção da operada As é simplificada desde que não há necessidade de referência a cores e desde que para cada vértice interno de uma árvore temos apenas um ponto e, em particular, todo vértice de grau 2 é necessariamente decorado com a unidade de As . Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$

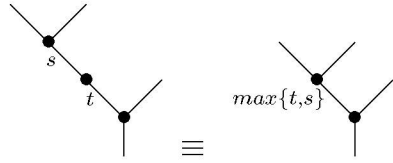
$$\mathbb{W}_n := (\mathbb{W}\text{As})(n) = \left(\prod_{\tau \in \mathcal{T}_n} [0, 1]^{|\tau|} \right) / \equiv,$$

onde a relação de equivalência \equiv é gerada pelas identificações abaixo, cujas descrições mais formais podem ser encontradas no apêndice C.

(a) uma árvore métrica com uma aresta e de comprimento 0 é identificada com a árvore métrica obtida contraindo-se e ;



(b) uma árvore métrica com um vértice v de grau 2 incidente a arestas de comprimento t e s é identificada com a árvore métrica obtida descartando-se v e dando comprimento $\max\{t, s\}$ à nova aresta.



Um elemento $[\tau, t_1, \dots, t_{|\tau|}] \in \mathbb{W}_n$ será denotado apenas por τ sempre que conveniente. Lembremos que as composições operádicas da \mathbb{W} -construção de uma operada topológica são induzidas das composições de árvores métricas.

A \mathbb{W} -construção da operada $\overline{\text{As}}$ é ainda mais simples, desde que todas as árvores com ao menos um fruto são descartadas. Neste caso, para cada n o conjunto \mathcal{T}_n é finito e então $\overline{\text{WAs}}(n)$ é um CW-complexo finito.

Para cada $n \geq 1$ seja $\mathbb{K}_n := (\overline{\text{WAs}})(n)$ e seja $\mathbb{K}_0 := \{\delta_0\}$. Para quaisquer $n, m \geq 1$ e $1 \leq i \leq n$ definimos as composições

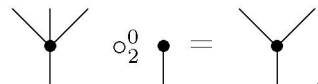
$$\circ_i : \mathbb{K}_n \times \mathbb{K}_m \rightarrow \mathbb{K}_{n+m-1}$$

como em $\overline{\text{WAs}}$. Para $m = 0$ definimos as composições

$$\circ_i : \mathbb{K}_n \times \mathbb{K}_0 \rightarrow \mathbb{K}_{n-1}$$

$$(\tau, \delta_0) \mapsto \tau \circ_i^0 \delta_0.$$

Onde o sobrescrito 0 significa que damos comprimento 0 caso uma aresta interna seja criada no enxerto de árvores, conforme apêndice B. Na prática as composições do segundo tipo excluem galhos, devido as identificações da \mathbb{W} -construção.



Por inspeção direta essas composições definem uma operada topológica denotada por As_∞ . Para mais detalhes referimos [26]. Usaremos o mesmo símbolo \circ para composições em As_∞ e em $\overline{\text{WAs}}$.

Observação 3.1.3. Stasheff introduziu A_∞ -espaços (cf. [55]) a partir de análises de construções envolvendo grupos topológicos (cf. [42]) e monoides topológicos (cf. [13]),

que entre outras coisas implicam que espaços razoáveis são fracamente homotopicamente equivalentes a espaços de laços, e isso tem consequências diversas. Pode-se pensar que A_∞ -espaços são monoides topológicos em teoria de homotopia. Em linguagem atual, A_∞ -espaços são álgebras sobre As_∞ (cf. [26]).

Intuitivamente A_∞ -espaços não são os melhores representantes de monoides topológicos do ponto de vista homotópico devido à exigência de uma multiplicação com unidade estrita. Boardman e Vogt propuseram os $W\mathfrak{A}$ -espaços (cf. [8]), que, entre outras coisas, contornam a exigência de unidades estritas e oferecem uma nova maneira de parametrizar homotopias via linguagem de árvores. Em linguagem atual um $W\mathfrak{A}$ -espaço é uma álgebra sobre WAs .

Estamos em condições de definir A_∞ -ações

Definição 3.1.4. Uma A_∞ -ação consiste de espaços X e Y equipados com aplicações contínuas

$$\mu : \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_n \times X^n \rightarrow X$$

e

$$\nu : \coprod_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_{m+1} \times X^m \times Y \rightarrow Y,$$

chamadas de aplicações de estrutura, satisfazendo as condições abaixo para quaisquer elementos de seus domínios em que as expressões façam sentido:

- (a) $\mu(\delta_1, x) = x$ e $\nu(\delta_1, y) = y$;
- (b) $\mu(\tau \circ (\tau_n), x_{\underline{k}_1}^1, \dots, x_{\underline{k}_n}^n) = \mu(\tau, \mu(\tau_1, x_{\underline{k}_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{\underline{k}_n}^n))$;
- (c) $\nu(\tau \circ (\tau_m, \varsigma), x_{\underline{l}_1}^1, \dots, x_{\underline{l}_m}^m, x_p, y) = \nu(\tau, \mu(\tau_1, x_{\underline{l}_1}^1), \dots, \mu(\tau_m, x_{\underline{l}_m}^m), \nu(\varsigma, x_p, y))$.

Uma A_∞ -ação é denotada por (X, Y, μ, ν) ou apenas por (X, Y) quando as aplicações de estrutura estiverem subentendidas.

Definimos agora uma estrutura de categoria para A_∞ -ações.

Definição 3.1.5. Sejam $U = (X, Y, \mu, \nu)$ e $V = (X', Y', \mu', \nu')$ A_∞ -ações. Um morfismo de A_∞ -ações $(f, g) : U \rightarrow V$ consiste de aplicações contínuas $f : X \rightarrow X'$ e $g : Y \rightarrow Y'$ tais que os diagramas abaixo comutam.

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_n \times X^n & \xrightarrow{\mu} & X \\ \oplus_{n \in \mathbb{N}} 1 \times f^n \downarrow & & \downarrow f \\ \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_n \times X'^n & \xrightarrow{\mu'} & X' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_{m+1} \times X^n \times Y & \xrightarrow{\nu} & Y \\
\oplus_{n \in \mathbb{N}} 1 \times f^n \times g \downarrow & & \downarrow g \\
\coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_{m+1} \times X^m \times Y' & \xrightarrow{\nu'} & Y'.
\end{array}$$

A operada topológica $\{\mathfrak{c}, \mathfrak{o}\}$ -colorida Act_∞ é construída a partir de $\overline{\mathbb{W}\text{Act}}$ do mesmo modo que As_∞ , pondo $\text{Act}_\infty(\cdot; \mathfrak{c}) := \{\delta_0\}$. O seguinte resultado nos permite estudar A_∞ -ações via teoria de categorias modelo.

Proposição 3.1.6. *A categoria das A_∞ -ações é isomorfa a $\text{Alg}(\text{Act}_\infty)$.*

Demonstração. Veja [26]. □

Uma verificação detalhada da proposição acima é rotineira porém laboriosa. Uma das coisas a ser verificada é que $\text{Act}_\infty(n; \mathfrak{c}) = \mathbb{K}_n$ e $\text{Act}_\infty(m, \mathfrak{o}, \mathfrak{o}) = \mathbb{K}_{m+1}$ para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$. É necessário verificar, por exemplo, que uma $(n; \mathfrak{c})$ -árvore com ao menos uma aresta de cor \mathfrak{o} tem necessariamente um vértice decorado pelo conjunto vazio e por isso tais árvores não acrescentam coisa alguma a $\overline{\mathbb{W}\text{Act}}(n; \mathfrak{c})$.

No que segue justificamos porque uma A_∞ -ação é dita ter uma unidade estrita.

Observação 3.1.7. *Seja (X, Y, μ, ν) uma A_∞ -ação e definamos $e_X := \mu(\delta_0) \in X$. Desde que $\mathbb{K}_2 = \{\delta_2\}$, então μ e ν induzem aplicações $M : X \times X \rightarrow X$ e $L : X \times Y \rightarrow Y$ de modo óbvio. Sejam $x \in X$ e $y \in Y$. Segue então que*

$$M(x, e_X) = \mu(\delta_2, \mu(\delta_1, x), \mu(\delta_0)) = \mu(\delta_2 \circ (\delta_1, \delta_0), x) = \mu(\delta_1, x) = x.$$

Do mesmo modo se mostra que $M(e_X, x) = x$ e $L(e_X, y) = y$. É possível mostrar que as aplicações M e L cumprem as propriedades de associatividade (no sentido da definição 3.0.2) a menos de homotopia e então uma A_∞ -ação pode ser pensada como uma ação topológica a menos de homotopia (com unidade estrita). Daremos uma justificativa mais detalhada disso no caso de h -ações.

Mais detalhes sobre A_∞ -ações podem ser encontrados em [26, 48].

Definimos agora h -ações. A definição é similar a definição de A_∞ -ações, porém note que as composições de As_∞ e $\mathbb{W}\text{As}$ são incompatíveis no sentido que as inclusões $\mathbb{K}_n \hookrightarrow \mathbb{W}_n$ não definem um morfismo de operadas devido as composições que excluem galhos em As_∞ . Mostraremos na próxima seção que h -ações são mais adequadas que A_∞ -ações para representarem ações topológicas em teoria de homotopia.

Definição 3.1.8. *Uma h -ação consiste de espaços X e Y equipados com aplicações contínuas*

$$\mu : \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_n \times X^n \rightarrow X$$

e

$$\nu : \prod_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_{m+1} \times X^m \times Y \rightarrow Y,$$

chamadas de aplicações de estrutura, satisfazendo as condições abaixo para quaisquer elementos de seus domínios em que as expressões façam sentido:

- (a) $\mu(\delta_1, x) = x$ e $\nu(\delta_1, y) = y$;
- (b) $\mu(\tau \circ (\tau_n), x_{\underline{k_1}}^1, \dots, x_{\underline{k_n}}^n) = \mu(\tau, \mu(\tau_1, x_{\underline{k_1}}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{\underline{k_n}}^n))$;
- (c) $\nu(\tau \circ (\tau_m, \varsigma), x_{\underline{l_1}}^1, \dots, x_{\underline{l_m}}^m, x_{\underline{p}}, y) =$
 $= \nu(\tau, \mu(\tau_1, x_{\underline{l_1}}^1), \dots, \mu(\tau_m, x_{\underline{l_m}}^m), \nu(\varsigma, x_{\underline{p}}, y))$.

Uma h -ação é denotada por (X, Y, μ, ν) ou apenas por (X, Y) quando as aplicações de estrutura estiverem subentendidas.

Ações homotópicas possuem uma estrutura natural de categoria, similar à de A_∞ -ações. O próximo resultado nos permitirá estudar h -ações via categorias modelo e compará-las com A_∞ -ações e ações topológicas.

Proposição 3.1.9. *A categoria das h -ações é isomorfa a $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$.*

Demonstração. A demonstração é totalmente similar ao correspondente resultado para A_∞ -ações. Por exemplo, mostra-se que

$$\mathbb{W}\text{Act}(n; \mathfrak{c}) = \mathbb{W}_n \text{ e } \mathbb{W}\text{Act}(m, \mathfrak{o}; \mathfrak{o}) = \mathbb{W}_{m+1}$$

para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$. □

Segue exemplos e construções envolvendo h -ações.

Exemplo 3.1.10. *Ações topológicas possuem estruturas naturais de h -ações conforme o funtor restrição $\varphi^* : \text{Alg}(\text{Act}) \rightarrow \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ definido adiante.*

Exemplo 3.1.11. *A_∞ -ações também possuem estruturas naturais de h -ações conforme o funtor restrição $\xi^* : \text{Alg}(\text{Act}_\infty) \rightarrow \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ definido adiante.*

Exemplo 3.1.12. *Toda h -ação (X, Y, μ, ν) define outra h -ação dada por (X, CY, μ, ν') , onde C denota o endofuntor cone (não reduzido) em top e ν' é definida de modo natural (veja a seção sobre a retificação \mathcal{HLS}). Esta correspondência define um endofuntor*

$$\mathfrak{c} : \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}) \rightarrow \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$$

$$(f, g) \mapsto (f, \mathbf{C}g).$$

Exemplo 3.1.13. *Sejam A e B espaços com um ponto base comum $b \in B$ e tais que $B \subseteq A$. Lembremos que o espaço de laços (de Poincaré) de $A = (A, b)$ e o espaço de laços relativos de $(A, B) = (A, B, b)$ são definidos respectivamente por*

$$\Omega(A) := \{\gamma \in A^{[0,1]}; \gamma(0) = b = \gamma(1)\}$$

e

$$\Omega(A, B) := \{\gamma \in A^{[0,1]}; \gamma(0) = b \text{ e } \gamma(1) \in B\}.$$

É possível mostrar que $(\Omega(A), \Omega(A, B))$ tem uma estrutura natural de h -ação induzida da concatenação de laços e caminhos.

$(\Omega(A), \Omega(A, B))$ é o exemplo protótipo de uma h -ação.

Exemplo 3.1.14. *Segue diretamente das definições que toda h -ação (X, Y, μ, ν) projeta o $W\mathfrak{U}$ -espaço (X, μ) . Esta correspondência define um funtor*

$$\mathbf{p} : \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}) \rightarrow \text{Alg}(\mathbb{W}\text{As})$$

$$(f, g) \mapsto f.$$

Por outro lado, todo $W\mathfrak{U}$ -espaço (X, μ) define ao menos duas h -ações: $(X, \{\}, \mu, \nu_*)$, onde ν_* é a aplicação óbvia, e (X, X, μ, μ') , onde μ' é a restrição óbvia de μ . Estas correspondências definem funtores*

$$\mathbf{i} : \text{Alg}(\mathbb{W}\text{As}) \rightarrow \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$$

$$f \mapsto (f, 1)$$

e

$$\mathbf{d} : \text{Alg}(\mathbb{W}\text{As}) \rightarrow \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$$

$$f \mapsto (f, f).$$

Pode-se verificar que \mathbf{p} e \mathbf{i} definem a adjunção $\mathbf{p} \dashv \mathbf{i}$, onde a unidade e a counidade são definidas naturalmente. Ademais essa adjunção é uma adjunção de Quillen.

Segue dos exemplos 3.1.11 e 3.1.14 que todo A_∞ -espaço tem uma estrutura natural de $W\mathfrak{U}$ -espaço.

Exemplo 3.1.15. *Em [53], Slifker constrói uma estrutura não trivial de A_∞ -espaço sobre a esfera \mathbb{S}^3 . Portanto existe uma estrutura não trivial de h -ação $(\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^3)$, pois esse par também é uma h -ação com respeito à estrutura de grupo topológico em \mathbb{S}^3 dada pela multiplicação de quatérnios.*

Exemplo 3.1.16. *A esfera \mathbb{S}^7 não admite uma multiplicação associativa a menos de homotopia (cf. [56], Teorema 7.4), isto é, não existe uma aplicação contínua $m : \mathbb{S}^7 \times \mathbb{S}^7 \rightarrow \mathbb{S}^7$ tal que $m(m \times 1)$ seja homotópica a $m(1 \times m)$. Segue então da observação abaixo que não existem h -ações do tipo (\mathbb{S}^7, Y) . Mais geralmente, se $p \notin \{0, 1, 3, 7\}$ então não existem h -ações do tipo (\mathbb{S}^p, Y) , pois pelo teorema de Adams (cf. [2]), \mathbb{S}^p não admite estrutura de H -espaço, e toda h -ação (X, Y) induz uma multiplicação com unidade homotópica em X , que então poderia ser retificada em uma unidade estrita (cf. [8, 56]) já que \mathbb{S}^p é um CW-complexo.*

Finalizamos esta seção justificando porque h -ações são ações topológicas a menos de homotopia, conforme a terminologia sugere.

Seja (X, Y, μ, ν) uma h -ação. Considere as aplicações $M : X \times X \rightarrow X$ e $L : X \times Y \rightarrow Y$ definidas, respectivamente, por $M(a, b) := \mu(\delta_2, a, b)$ e $L(a, y) := \nu(\delta_2, a, y)$ para quaisquer $a, b \in X$ e $y \in Y$. Definamos também $e_X := \mu(\delta_0) \in X$. Para cada $t \in [0, 1]$ considere a árvore métrica

$$\tau_t := \delta_2 \circ_1^t \delta_0 : \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ t \quad \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} .$$

Esta árvore define uma homotopia

$$H : [0, 1] \times X \rightarrow X$$

$$(t, a) \mapsto \mu(\tau_t, a)$$

conectando

$$\mu(\delta_1, a) = a \text{ (para } t = 0)$$

a

$$\mu(\delta_2 \circ (\delta_0, \delta_1), a) = \mu(\delta_2, \mu(\delta_0), \mu(\delta_1, a)) = M(e_X, a) \text{ (para } t = 1).$$

Do mesmo modo existem homotopias conectando a a $M(a, e_X)$ e y a $L(e_X, y)$. Por isso e_X é dita ser a unidade homotópica da h-ação (X, Y) .

Considere agora as árvores métricas

$$\rho_t := \delta_2 \circ_1^{1-t} \delta_2 : \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} \quad e \quad \varsigma_s := \delta_2 \circ_2^s \delta_2 : \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} .$$

Estas árvores definem homotopias

$$H' : [0, 1] \times X \times X \times Y \rightarrow Y$$

$$(t, x, y) \mapsto \nu(\rho_t, a, b, y)$$

e

$$H'' : [0, 1] \times X \times X \times Y \rightarrow Y$$

$$(s, a, b, y) \mapsto \nu(\varsigma_s, a, b, y)$$

conectando

$$\nu(\delta_2 \circ (\delta_2, \delta_1)) = \nu(\delta_2, \mu(\delta_2, a, b), \nu(\delta_1, y)) = L(M(a, b), y) \text{ (para } t = 0)$$

a

$$\nu(\delta_3, a, b, y) \text{ (para } t = 1)$$

e

$$\nu(\delta_3, a, b, y) \text{ (para } s = 0)$$

a

$$\nu(\delta_2 \circ (\delta_1, \delta_2)) = \nu(\delta_2, \mu(\delta_1, a), \nu(\delta_2, b, y)) = L(a, L(b, y)) \text{ (para } s = 1),$$

e então existe uma homotopia conectando $(ab).y$ a $a.(b.y)$, conforme a notação da definição 3.0.2. Analogamente existe uma homotopia conectando $(ab)c$ a $a(bc)$ para quaisquer $a, b, c \in X$.

Em geral é possível mostrar (usando árvores binárias e suas decomposições em 2-corolas) que μ e ν induzem homotopias conectando quaisquer dois modos de iterar M ou iterar M e L .

3.2 Ações via categorias modelo

Nesta seção nós estudamos as operadas topológicas Act , Act_∞ e $\mathbb{W}\text{Act}$ do ponto de vista de categorias modelo, bem como suas categorias de álgebras.

A_∞ -ações e h -ações foram criadas propositalmente para substituírem ações topológicas em teoria de homotopia, por isso ocasionalmente são chamadas de ações topológicas a menos de homotopia e na primeira seção do presente capítulo justificamos brevemente esse argumento. A fim de estudarmos e compararmos estes três tipos de ações mediante uma linguagem formal e precisa, utilizaremos a teoria de categorias modelo, pois esta formaliza o conceito de homotopia em categorias e fornece ferramentas precisas para compará-las.

Já vimos que as categorias das ações topológicas, A_∞ -ações e h -ações podem ser consideradas, respectivamente, como as categorias

$$\text{Alg}(\text{Act}), \quad \text{Alg}(\text{Act}_\infty) \quad \text{e} \quad \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}),$$

assim nós definiremos estruturas modelo naturais nessas categorias e então mostraremos que essas categorias são todas Quillen equivalentes e portanto possuem categorias homotópicas equivalentes. Isso formaliza, por exemplo, a afirmação que A_∞ -ações e h -ações são ações topológicas a menos de homotopia.

Mostraremos também que toda A_∞ -ação tem uma estrutura natural de h -ação. Embora esse fato seja intuitivo, ele não é imediato. Esse resultado será amplamente usado nos resultados de comparação de retificações nas próximas seções.

Começemos munindo nossas categorias de álgebras com estruturas modelo.

Proposição 3.2.1. *As categorias $\text{Alg}(\text{Act})$, $\text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ e $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ possuem uma estrutura modelo tal que um morfismo (f_c, f_o) é uma equivalência fraca (respectivamente fibração) se, e somente se f_c e f_o são equivalências homotópicas fracas (respectivamente fibrações de Serre). Em particular, todos os objetos são fibrantes nestas categorias.*

Demonstração. Este é um corolário do teorema 2.5.12. □

No que segue preparamos o terreno para compararmos os conceitos de ação considerados neste trabalho.

Notemos que para cada $(c_n; c) \in \{\mathfrak{c}, \mathfrak{o}\}$ nós temos duas possibilidades:

$$\text{Act}(c_n; c) = \{*\}$$

ou

$$\text{Act}(c_n; c) = \text{Act}_\infty(c_n; c) = \mathbb{W}\text{Act}(c_n; c) = \emptyset,$$

e por isso existem únicas aplicações

$$\psi : \text{Act}_\infty \rightarrow \text{Act}$$

e

$$\varphi : \mathbb{W}\text{Act} \rightarrow \text{Act}$$

que são trivialmente morfismos de operadas.

Em particular, notemos que o funtor restrição $\psi^* : \text{Alg}(\text{Act}) \rightarrow \text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ (respectivamente $\varphi^* : \text{Alg}(\text{Act}) \rightarrow \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$) equipa naturalmente uma ação topológica (X, Y) com uma estrutura de A_∞ -ação (respectivamente h -ação). Por inspeção direta, as aplicações de estrutura em (X, Y) são obtidas da unidade de X e das iterações da multiplicação e da ação de (X, Y) .

Apesar dos morfismos φ e ψ serem muito simples, eles implicam importantes resultados, como já mostra o seguinte teorema, que confirma em linguagem formal de categorias modelo que as categorias $\text{Alg}(\text{Act})$, $\text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ e $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ são homotopicamente indistintas.

Teorema 3.2.2. *As adjunções extensão-restrição*

$$\psi_! : \text{Alg}(\text{Act}_\infty) \rightleftarrows \text{Alg}(\text{Act}) : \psi^*$$

e

$$\varphi_! : \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}) \rightleftarrows \text{Alg}(\text{Act}) : \varphi^*$$

são equivalências de Quillen.

Demonstração. Verifiquemos as hipóteses do teorema 2.5.13 e notemos que parte delas seguem do teorema 3.0.1. Seja $n \in \mathbb{N}$.

Desde que \mathbb{W}_n e \mathbb{K}_n são CW-complexos (pois são obtidos por colagens bem comportadas de hipercubos ao longo de suas fronteiras), segue que as operadas Act , $\mathbb{W}\text{Act}$ e Act_∞ são todas Σ -cofibrantes.

Desde que \mathbb{W}_n e \mathbb{K}_n são espaços contráteis (a n -corola é um retrato por deformação forte de ambos e a homotopia é dada por multiplicação dos comprimentos das arestas internas de cada árvore métrica), segue que φ e ψ são Σ -equivalências fracas.

As inclusões de unidades em Act e Act_∞ são identidades, e em particular cofibrações de Quillen. Finalmente as inclusões de unidades em $\mathbb{W}\text{Act}$ são CW-inclusões da 0-célula δ_1 e por isso são cofibrações de Quillen (inclusões de subcomplexos em CW-complexos são complexos celulares relativos no sentido de categorias modelo cofibrantemente geradas (cf. [25], Exemplo 3.3), e por isso são cofibrações de Quillen). Assim as operadas Act , $\mathbb{W}\text{Act}$ e Act_∞ são todas bem pontuadas. \square

Corolário 3.2.3. *As categorias homotópicas*

$$\text{HoAlg}(\text{Act}_\infty), \text{HoAlg}(\text{Act}) \text{ e } \text{HoAlg}(\mathbb{W}\text{Act})$$

são categorias equivalentes.

Demonstração. Lembremos que qualquer equivalência de Quillen induz uma equivalência de categorias entre as categorias homotópicas via construção de funtores derivados totais, portanto $\text{HoAlg}(\text{Act}_\infty)$ e $\text{HoAlg}(\text{Act})$ são categorias equivalentes bem como $\text{HoAlg}(\mathbb{W}\text{Act})$ e $\text{HoAlg}(\text{Act})$, e então segue que $\text{HoAlg}(\text{Act}_\infty)$ e $\text{HoAlg}(\mathbb{W}\text{Act})$ também são categorias equivalentes. \square

Embora o fato de $\text{HoAlg}(\text{Act}_\infty)$ e $\text{HoAlg}(\mathbb{W}\text{Act})$ serem categorias equivalentes já seja uma boa comparação entre A_∞ -ações e h -ações, nós queremos melhorá-la, pois a intuição sugere que as categorias $\text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ e $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ são Quillen equivalentes, e é isso que mostraremos adiante.

Lembremos que se duas categorias modelo têm categorias homotópicas equivalentes isto não implica necessariamente que elas sejam Quillen equivalentes. Veja por exemplo [14].

O próximo resultado diz que a operada topológica $\mathbb{W}\text{Act}$ é cofibrante e isso será essencial nos próximos resultados.

Proposição 3.2.4. *A operada topológica $\mathbb{W}\text{Act}$ é uma resolução cofibrante de Act .*

Demonstração. Isso segue do teorema 2.5.5, desde que Act é trivialmente Σ -cofibrante e bem pontuada. \square

Lema 3.2.5. *Seja $f : \mathcal{P} \rightarrow \text{Act} \in \text{Op}_{\{\mathbf{c}, \mathbf{o}\}}(\text{top})$. Então f é uma fibração.*

Demonstração. Seja $(c_n; c) \in \{\mathbf{c}, \mathbf{o}\}$. Se $\text{Act}(c_n; c) = \emptyset$ então $f_{(c_n; c)} = 1_\emptyset$. Se $\text{Act}(c_n; c) = \{*\}$ então $f_{(c_n; c)} : \mathcal{P}(c_n; c) \rightarrow *$ é uma fibração de Serre. Assim f é uma Σ -fibrção e portanto uma fibração. \square

Proposição 3.2.6. *Seja $f : \mathcal{P} \rightarrow \text{Act} \in \text{Op}_{\{\mathbf{c}, \mathbf{o}\}}(\text{top})$ uma equivalência fraca. Então existe um morfismo de operadas $g : \mathbb{W}\text{Act} \rightarrow \mathcal{P}$ tal que $fg = \varphi$.*

Demonstração. Desde que $\mathbb{W}\text{Act}$ é cofibrante e f é uma fibração acíclica pelo lema anterior, segue que φ admite um levantamento ao longo de f .

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{P} \\ & \nearrow g & \downarrow f \\ \mathbb{W}\text{Act} & \xrightarrow{\varphi} & \text{Act} . \end{array}$$

\square

Corolário 3.2.7. *Existe um morfismo de operadas $\xi : \mathbb{W}\text{Act} \rightarrow \text{Act}_\infty$ tal que $\psi\xi = \varphi$.*

Demonstração. De fato, já verificamos que ψ é uma equivalência fraca.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Act}_\infty \\ & \nearrow \xi & \downarrow \psi \\ \mathbb{W}\text{Act} & \xrightarrow{\varphi} & \text{Act} . \end{array}$$

\square

Corolário 3.2.8. *Toda A_∞ -ação tem uma estrutura natural de h -ação.*

Demonstração. Considere o funtor restrição $\xi^* : \text{Alg}(\text{Act}_\infty) \rightarrow \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. \square

Corolário 3.2.9. *A adjunção extensão-restrição*

$$\xi_! : \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}) \rightleftarrows \text{Alg}(\text{Act}_\infty) : \xi^*$$

é uma equivalência de Quillen.

Demonstração. Já vimos que $\mathbb{W}\text{Act}$ e Act_∞ são Σ -cofibrantes e bem pontuadas. Segue de $\psi\xi = \varphi$ e da propriedade 2-de-3 que ξ é uma equivalência fraca e portanto uma Σ -equivalência fraca. O resultado segue do teorema 2.5.13. \square

Corolário 3.2.10. *A operada topológica $\mathbb{W}\text{Act}$ é uma resolução cofibrante de Act_∞ .*

Demonstração. De fato, $\mathbb{W}\text{Act}$ é cofibrante e $\xi : \mathbb{W}\text{Act} \rightarrow \text{Act}_\infty$ é uma equivalência fraca pela demonstração anterior. \square

Notemos que qualquer morfismo de operadas entre $\mathbb{W}\text{Act}$ e Act_∞ fatora φ ao longo ψ e portanto é necessariamente uma equivalência fraca. No final do Apêndice C nós damos uma construção explícita de um morfismo entre $\mathbb{W}\text{Act}$ e Act_∞ , devido sua importância em nossos resultados de comparação de retificações.

O próximo resultado mostra que a consideração da resolução cofibrante $\mathbb{W}\text{Act}$ de Act não é supérflua, pois Act não é cofibrante.

Proposição 3.2.11. *Não existe um morfismo de operadas entre Act e Act_∞ . Em particular a operada topológica Act não é cofibrante e também não existe um morfismo de operadas entre Act e $\mathbb{W}\text{Act}$.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que existe $f : \text{Act} \rightarrow \text{Act}_\infty \in \text{Op}_{\{\text{c}, \text{o}\}}(\text{top})$ e notemos que em particular $f_{(n;\text{c})}(\ast) = \delta_n$ para $n \in \{0, 1, 2\}$. Ademais suponhamos que $f_{(3;\text{c})}(\ast) = \tau \in \mathbb{K}_3$. Segue que

$$\begin{aligned} \tau &= \\ &= f_{(3;\text{c})}(\ast) = \\ &= f_{(3;\text{c})}(\ast \circ (\ast, \ast, \ast)) = \\ &= f_{(3;\text{c})}(\ast) \circ (f_{(2;\text{c})}(\ast), f_{(1;\text{c})}(\ast), f_{(0;\text{c})}(\ast)) = \\ &= \tau \circ (\delta_2, \delta_1, \delta_0). \end{aligned}$$

Desde que

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_3 &= \{\delta_2 \circ_1^t \delta_2, \delta_3, \delta_2 \circ_2^s \delta_2; t, s \in]0, 1]\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } \delta_2 \circ_1^t \delta_2 \\ \text{Diagram 2: } \delta_3 \\ \text{Diagram 3: } \delta_2 \circ_2^s \delta_2 \end{array} ; t, s \in]0, 1] \right\}, \end{aligned}$$

segue por inspeção direta que a igualdade $\tau = \tau \circ (\delta_2, \delta_1, \delta_0)$ é um absurdo para qualquer $\tau \in \mathbb{K}_3$.

Agora, se Act fosse cofibrante, então existiria um levantamento da identidade de Act ao longo da fibração acíclica ψ

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Act}_\infty \\ & \nearrow \xi & \downarrow \psi \\ \text{Act} & \xrightarrow{1} & \text{Act} \end{array}$$

Finalmente, se existisse um morfismo entre Act e $\mathbb{W}\text{Act}$, então existiria um morfismo entre Act e Act_∞ por composição com $\xi : \mathbb{W}\text{Act} \rightarrow \text{Act}_\infty$. \square

No restante desta seção nós continuamos estudando as operadas topológicas Act , $\mathbb{W}\text{Act}$ e Act_∞ via categorias modelo e com isso justificaremos porque A_∞ -ações não são totalmente adequadas para o estudo de ações topológicas em teoria de homotopia.

Proposição 3.2.12. *Não existe um morfismo de operadas entre Act_∞ e $\mathbb{W}\text{Act}$.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que existe $f : \text{Act}_\infty \rightarrow \mathbb{W}\text{Act} \in \text{Op}_{\{c,o\}}(\text{top})$. Seja u a árvore trivial \mid e lembremos que $u = \delta_1$ tanto em \mathbb{K}_1 quanto em \mathbb{W}_1 . Então em particular

$$u = f_{(1;c)}(u) = f_{(1;c)}(\delta_2 \circ_1 \delta_0) = f_{(2;c)}(\delta_2) \circ_1 f_{(0;c)}(\delta_0),$$

o que é um absurdo, pois, $f_{(0;c)}(\delta_0) \in \mathbb{W}_0$ tem ao menos um fruto e portanto $f_{(2;c)}(\delta_2) \circ_1 f_{(0;c)}(\delta_0)$ também tem ao menos um fruto. \square

Seja \mathcal{P} uma operada admissível em uma categoria modelo monoidal \mathcal{V} e suponha que $\tilde{\mathcal{P}}$ é uma resolução cofibrante admissível de \mathcal{P} . Berger e Moerdijk [4] sugerem que o conceito adequado de uma \mathcal{P} -álgebra a menos de homotopia seja uma $\tilde{\mathcal{P}}$ -álgebra, pois a cofibrância de $\tilde{\mathcal{P}}$ implica levantamentos de morfismos ao longo de fibrações acíclicas e isso tem consequências diversas.

Finalizamos esta seção mostrando, a luz da observação acima, que uma A_∞ -ação não é o conceito adequado de uma ação topológica a menos de homotopia. Embora $\psi : \text{Act}_\infty \rightarrow \text{Act}$ seja uma equivalência fraca, mostraremos que Act_∞ não é cofibrante.

Proposição 3.2.13. *A operada topológica Act_∞ não é cofibrante. Em particular Act_∞ não é uma resolução cofibrante de Act .*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que Act_∞ é cofibrante. Desde que $\varphi : \mathbb{W}\text{Act} \rightarrow \text{Act}$ é uma fibração acíclica, então $\psi : \text{Act}_\infty \rightarrow \text{Act}$ pode ser levantado ao longo de φ a um morfismo de operadas $\zeta : \text{Act}_\infty \rightarrow \mathbb{W}\text{Act}$, mas isso é um absurdo pelo corolário anterior.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{W}\text{Act} \\ & \nearrow \zeta & \downarrow \varphi \\ \text{Act}_\infty & \xrightarrow{\psi} & \text{Act} \end{array}$$

\square

O corolário a seguir é apenas a efeito de curiosidade.

Corolário 3.2.14. *Não existe uma cofibração entre $\mathbb{W}\text{Act}$ e Act_∞ .*

Demonstração. Se existisse uma tal cofibração então Act_∞ seria cofibrante. \square

3.3 A retificação de Berger-Moerdijk

Para que os conceitos e os resultados desta seção e das próximas sejam bem postos nós formalizaremos no que segue o conceito de retificação de álgebras a menos de homotopia. Berger e Moerdijk [4] sugerem, mesmo que não nesses termos, que uma retificação de uma \mathcal{P} -álgebra a menos de homotopia A deva ser uma \mathcal{P} -álgebra A' de modo que A e A' sejam fracamente equivalentes em certo sentido. No que segue, lembremos que toda operada topológica é admissível.

Definição 3.3.1. *Seja $\mathcal{P} \in \text{Op}_{\mathcal{C}}(\text{top})$ e seja $(\mathcal{Q}, \gamma : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P})$ uma resolução cofibrante de \mathcal{P} . Um funtor retificação de \mathcal{Q} -álgebras com respeito a γ é qualquer funtor $F : \text{Alg}(\mathcal{Q}) \rightarrow \text{Alg}(\mathcal{P})$. Seja $A \in \text{Alg}(\mathcal{Q})$. Dizemos que*

(a) *FA é uma retificação efetiva de A se existe uma equivalência fraca $f : A \rightarrow \gamma^*FA$ em $\text{Alg}(\mathcal{Q})$;*

(b) *FA é uma retificação boa de A se existe uma equivalência homotópica fraca $f : A \rightarrow FA$ em $\text{top}^{\mathcal{C}}$;*

(c) *FA é uma retificação ótima de A se existe uma equivalência homotópica $f : A \rightarrow FA$ em $\text{top}^{\mathcal{C}}$.*

Segue da definição que retificações efetivas e ótimas são retificações boas. Nós permitimos uma excessão na definição acima: o funtor

$$\mathcal{HLS} : \text{Alg}(\text{Act}_{\infty}) \rightarrow \text{Alg}(\text{Act})$$

definido na sexta seção será considerado um funtor retificação de A_{∞} -ações com respeito a $(\text{Act}_{\infty}, \psi)$, mesmo que esse par não seja uma resolução cofibrante de Act , conforme seção anterior. Nesse caso, \mathcal{HLS} fornece exemplos de retificações boas (sobre A_{∞} -ações grouplike) que não são necessariamente efetivas ou ótimas.

Nesta seção daremos exemplos de retificações efetivas e no próximo de retificações ótimas de h-ações.

De acordo com a definição anterior, o funtor extensão $\varphi_! : \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}) \rightarrow \text{Alg}(\text{Act})$ é um funtor retificação de h-ações com respeito a $\varphi : \mathbb{W}\text{Act} \rightarrow \text{Act}$. Nesta seção nós daremos uma descrição explícita do funtor extensão $\varphi_!$, isto é, para cada h-ação (X, Y) nós construiremos functorialmente uma ação topológica $\varphi_!(X, Y)$ e mostraremos que $\varphi_!$ é de fato adjunto à esquerda do funtor restrição φ^* . Diremos que $\varphi_!(X, Y)$ é a retificação de Berger-Moerdijk ou a retificação \mathcal{BM} de (X, Y) . Embora a adjunção extensão-restrição induzida de um morfismo de operadas seja bem conhecida na literatura, as principais propriedades desta adjunção no contexto de categorias modelo foram estabelecidas por Berger e Moerdijk em [4] e [5], e com isso justificamos o nome dado à retificação em questão.

Para muitos propósitos a descrição explícita de $\varphi_!$ é desnecessária pois basta utilizar as propriedades da adjunção de Quillen associada. Nós temos dois motivos para calculá-lo: o primeiro é mero interesse em ver como ele retifica uma h-ação em uma ação topológica e o segundo é a necessidade de tal descrição explícita para compará-lo com o funtor retificação de Boardman-Vogt.

Embora exista um procedimento geral para o cômputo de funtores extensão (cf. [5, 18]), na prática pode ser difícil obtê-los explicitamente pois é necessário computar coequalizadores em categorias de álgebras sobre operadas.

Para os nossos objetivos não é necessário tentar obter $\varphi_!(X, Y)$ como um coequalizador em $\text{Alg}(\text{Act})$, embora no final se possa concluir isso. Trabalharemos com coequalizadores em top e construiremos todas as aplicações necessárias explicitamente.

Veremos que $\varphi_!(X, Y)$ é um quociente da ação topológica livre

$$\left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} X^n \times \{*\}, \coprod_{m \in \mathbb{N}} X^m \times Y \right)$$

gerada por (X, Y) e que as concatenações são preservadas em classes de equivalência.

A estrutura básica desta seção é a seguinte, construiremos o funtor $\varphi_!$, mostraremos que ele é adjunto à esquerda de φ^* e então investigaremos a relação entre uma h-ação e sua retificação \mathcal{BM} . O principal resultado desta seção diz que se (X, Y) é uma h-ação cofibrante, então a unidade da adjunção $\varphi_! \dashv \varphi^*$

$$\eta_{(X, Y)} : (X, Y) \rightarrow \varphi^* \varphi_!(X, Y)$$

em (X, Y) é uma equivalência fraca em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ e portanto a retificação \mathcal{BM} de h-ações cofibrantes é efetiva.

Construiremos no segue o funtor extensão $\varphi_! : \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}) \rightarrow \text{Alg}(\text{Act})$.

A partir de agora (X, Y) sempre denotará uma h-ação com aplicações de estrutura μ e ν caso não haja menção explícita e (A, B) sempre denotará uma ação topológica com unidade e . As iterações da multiplicação e as iterações da multiplicação com a ação serão denotadas apenas por justaposição. A multiplicação de 0 elementos é a unidade por convenção.

Por simplicidade usaremos o mesmo símbolo $[\]$ para classes de equivalências, até quando trabalharmos com mais de um espaço quociente ao mesmo tempo.

Finalmente, $f(x_n)$ significa $f(x_1), \dots, f(x_n)$ para $n \geq 1$ e significa uma expressão vazia para $n = 0$, para quaisquer símbolos f e x .

Começamos definindo a segunda componente de $\varphi_!(X, Y)$.

Definição 3.3.2. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ e definamos*

$$(X, Y)_1 := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \left(\coprod_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_m \times X^m \right)^n \times \left(\coprod_{p \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_{p+1} \times X^p \times Y \right)$$

e

$$(X, Y)_2 := \coprod_{n \in \mathbb{N}} X^n \times Y.$$

Seja

$$w := ((\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, (\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n), (\varsigma, x_{\underline{p}}, y)) \in (X, Y)_1$$

e definamos

$$\alpha_Y, \beta_Y : (X, Y)_1 \rightarrow (X, Y)_2$$

por:

$$\alpha_Y(w) := (x_{\underline{m}_1}^1, \dots, x_{\underline{m}_n}^n, x_{\underline{p}}, y)$$

e

$$\beta_Y(w) := (\mu(\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n), \nu(\varsigma, x_{\underline{p}}, y)).$$

O coequalizador de α_Y e β_Y em \mathbf{top} é denotado por \hat{Y} . A projeção sobre \hat{Y} é denotada por π_Y e nós escrevemos $\pi_Y(x_{\underline{n}}, y) := [x_{\underline{n}}, y]$ para qualquer $(x_{\underline{n}}, y) \in (X, Y)_2$.

$$(X, Y)_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_Y} \\ \xrightarrow{\beta_Y} \end{array} (X, Y)_2 \xrightarrow{\pi_Y} \hat{Y}.$$

Agora começamos a definir $\varphi_!$ nos morfismos.

Proposição 3.3.3. *Seja $(f, g) : (X, Y) \rightarrow (X', Y') \in \mathbf{Alg}(\mathbf{WAct})$. Então existe uma aplicação contínua*

$$\hat{g} : \hat{Y} \rightarrow \hat{Y}'$$

tal que

$$\hat{g}[x_{\underline{n}}, y] = [f(x_{\underline{n}}), g(y)]$$

para qualquer $(x_{\underline{n}}, y) \in (X, Y)_2$.

Demonstração. Definamos

$$\tilde{g} : (X, Y)_2 \rightarrow \hat{Y}'$$

por

$$\tilde{g}(x_{\underline{n}}, y) := [f(x_{\underline{n}}), g(y)].$$

para qualquer $(x_{\underline{n}}, y) \in (X, Y)_2$. Mostraremos que \tilde{g} coequaliza α_Y e β_Y e por isso existe uma única aplicação que fatora \tilde{g} ao longo de π_Y . De fato, seja

$$w := ((\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, (\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n), (\varsigma, x_{\underline{p}}, y)) \in (X, Y)_1.$$

Então:

$$\begin{aligned} \tilde{g}\alpha_Y(w) &= \\ &= \tilde{g}(x_{\underline{m}_1}^1, \dots, x_{\underline{m}_n}^n, x_{\underline{p}}, y) = \\ &= [f(x_{\underline{m}_1}^1), \dots, f(x_{\underline{m}_n}^n), f(x_{\underline{p}}), g(y)] = \\ &= [\mu'(\tau_1, f(x_{\underline{m}_1}^1)), \dots, \mu'(\tau_n, f(x_{\underline{m}_n}^n)), \nu'(\varsigma, f(x_{\underline{p}}), g(y))] = \\ &= [f\mu(\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, f\mu(\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n), g\nu(\varsigma, x_{\underline{p}}, y)] = \\ &= \tilde{g}(\mu(\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n), \nu(\varsigma, x_{\underline{p}}, y)) = \\ &= \tilde{g}\beta_Y(w). \end{aligned}$$

□

Observação 3.3.4. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Considere a aplicação*

$$s_Y : (X, Y)_2 \rightarrow (X, Y)_1$$

definida por

$$s_Y(x_{\underline{n}}, y) := ((\delta_1, x_1), \dots, (\delta_1, x_n), (\delta_1, y)),$$

para qualquer $(x_{\underline{n}}, y) \in (X, Y)_2$. Desde que $\mu(\delta_1, x) = x$ e $\nu(\delta_1, y) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, é imediato que $\alpha_Y s_Y = \beta_Y s_Y$ e então (\hat{Y}, π_Y) é um coequalizador reflexivo em top .

No que segue definimos a primeira componente de $\varphi_!(X, Y)$.

Definição 3.3.5. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ e definamos*

$$(X, Y)_3 := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \left(\coprod_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_m \times X^m \right)^n \times \{*\}$$

e

$$(X, Y)_4 := \coprod_{n \in \mathbb{N}} X^n \times \{*\}.$$

Seja

$$w := ((\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, (\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n), *) \in (X, Y)_3$$

e definamos

$$\alpha_X, \beta_X : (X, Y)_3 \rightarrow (X, Y)_4$$

por:

$$\alpha_X(w) := (x_{\underline{m}_1}^1, \dots, x_{\underline{m}_n}^n, *)$$

e

$$\beta_X(w) := (\mu(\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n), *).$$

*O coequalizador de α_X e β_X em top é denotado por \hat{X} . A projeção sobre \hat{X} é denotada por π_X e nós escrevemos $\pi_X(x_{\underline{n}}, *) := [x_{\underline{n}}, *]$ para qualquer $(x_{\underline{n}}, *) \in (X, Y)_4$.*

$$(X, Y)_3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_X} \\ \xrightarrow{\beta_X} \end{array} (X, Y)_4 \xrightarrow{\pi_X} \hat{X}.$$

A prova do seguinte resultado é similar à prova da proposição anterior e à justificativa da observação anterior.

Proposição 3.3.6. *Seja $(f, g) : (X, Y) \rightarrow (X', Y') \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Com respeito a construção de \hat{X} nós temos o seguinte:*

(a) *Existe uma aplicação contínua*

$$\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{X}'$$

tal que

$$\widehat{f}[x_n, *] := [f(x_n), *]$$

para qualquer $(x_n, *) \in (X, Y)_4$;

(b) A aplicação

$$s_X : (X, Y)_4 \rightarrow (X, Y)_3$$

definida por

$$s_X(x_n, y) := ((\delta_1, x_1), \dots, (\delta_1, x_n), *),$$

para qualquer $(x_n, *) \in (X, Y)_4$, é uma seção comum de α_X e β_X e então (\widehat{X}, π_X) é um coequalizador reflexivo em top .

O seguinte lema é útil para mostrarmos que a multiplicação e a ação (dadas por concatenação) da ação topológica livre gerada por (X, Y) pode ser transferida para $\varphi_!(X, Y)$. Para o conceito de coequalizador reflexivo referimos o apêndice A.

Lema 3.3.7. Para cada $i \in \{1, 2\}$, seja $f_i, g_i : A \rightarrow B \in \text{top}$ e suponha que (C_i, h_i) é um coequalizador reflexivo de f_i e g_i . Então $(C_1 \times C_2, h_1 \times h_2)$ é um coequalizador de $f_1 \times f_2$ e $g_1 \times g_2$.

Demonstração. Este é um caso particular do Lema 3.2.3 de [51]. □

No que segue mostramos que $\varphi_!(X, Y)$ tem uma estrutura natural de ação topológica.

Proposição 3.3.8. Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ e sejam

$$d : (X, Y)_4 \times (X, Y)_4 \rightarrow (X, Y)_4$$

e

$$D : (X, Y)_4 \times (X, Y)_2 \rightarrow (X, Y)_2$$

as aplicações de concatenação. Então existem aplicações

$$d_{(X, Y)} : \widehat{X} \times \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$$

e

$$D_{(X, Y)} : \widehat{X} \times \widehat{Y} \rightarrow \widehat{Y}$$

tais que

$$d_{(X, Y)}([x_n, *], [x'_m, *]) = [x_n, x'_m, *]$$

e

$$D_{(X, Y)}([x_n, *], [x''_p, y]) = [x_n, x''_p, y],$$

para quaisquer $(x_n, *)$, $(x'_m, *) \in (X, *)_4$ e $(x''_p, y) \in (X, Y)_2$.

Demonstração. Segue do lema 3.3.7, observação 3.3.4 e proposição 3.3.6 que nós só precisamos verificar que: (a) $\pi_X d$ coequaliza $\alpha_X \times \alpha_X$ e $\beta_X \times \beta_X$, (b) $\pi_Y D$ coequaliza $\alpha_X \times \alpha_Y$ e $\beta_X \times \beta_Y$. Provemos (b). Sejam

$$w := ((\tau_1, x_{m_1}^1), \dots, (\tau_n, x_{m_n}^n), *) \in (X, Y)_3$$

e

$$w' := ((\tau'_1, x'_{l_1}), \dots, (\tau'_k, x'_{l_k}), (\varsigma, x_p, y)) \in (X, Y)_2.$$

Segue que:

$$\begin{aligned} \pi_Y D(\alpha_X \times \alpha_Y)(w, w') &= \\ &= [x_{m_1}^1, \dots, x_{m_n}^n, x'_{l_1}, \dots, x'_{l_k}, x_p, y] = \\ &= [\mu(\tau_1, x_{m_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{m_n}^n), \mu(\tau'_1, x'_{l_1}), \dots, \mu(\tau'_k, x'_{l_k}), \nu(\varsigma, x_p, y)] = \\ &= \pi_Y D((\mu(\tau_1, x_{m_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{m_n}^n), *), (\mu(\tau'_1, x'_{l_1}), \dots, \mu(\tau'_k, x'_{l_k}), \nu(\varsigma, x_p, y))) = \\ &= \pi_Y D(\beta_X \times \beta_Y)(w, w'). \end{aligned}$$

A prova de $\pi_X d(\alpha_X \times \alpha_X) = \pi_X d(\beta_X \times \beta_X)$ é similar. \square

Corolário 3.3.9. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Então $(\widehat{X}, \widehat{Y}) \in \text{Alg}(\text{Act})$ junto com unidade $[*]$, multiplicação $d_{(X,Y)}$ e ação $D_{(X,Y)}$.*

O seguinte resultado finaliza a construção de $\varphi_!$.

Proposição 3.3.10. *Seja $(f, g) : (X, Y) \rightarrow (X', Y') \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Então*

$$(\widehat{f}, \widehat{g}) : (\widehat{X}, \widehat{Y}) \rightarrow (\widehat{X'}, \widehat{Y'}) \in \text{Alg}(\text{Act}).$$

Demonstração. Por construção nós temos que $\widehat{f}[*] = [*]$. Sejam $u := [x_n, *] \in \widehat{X}$ e $v := [x'_m, y] \in \widehat{Y}$. Então

$$\begin{aligned} \widehat{g}D_{(X,Y)}(u, v) &= \\ &= [f(x_n), f(x'_m), g(y)] = \\ &= D_{(X',Y')}([f(x_n), *], [f(x'_m), g(y)]) = \\ &= D_{(X',Y')}(\widehat{f} \times \widehat{g})(u, v). \end{aligned}$$

A prova de $\widehat{f}d_{(X,Y)} = d_{(X',Y')}(\widehat{f} \times \widehat{f})$ é similar. \square

Corolário 3.3.11. *A correspondência*

$$\varphi_!(X, Y) := (\widehat{X}, \widehat{Y})$$

$$\varphi_!(f, g) := (\widehat{f}, \widehat{g})$$

define um funtor

$$\varphi_! : \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}) \rightarrow \text{Alg}(\text{Act})$$

chamado de funtor retificação de Berger-Moerdijk ou funtor retificação \mathcal{BM} .

Demonstração. Segue diretamente das definições de \widehat{f} e \widehat{g} . \square

Nós finalizamos essa seção observando que $\varphi_!(X, Y)$ é um coequalizador em $\text{Alg}(\text{Act})$, para qualquer $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$, mesmo que não precisemos deste resultado.

Na proposição abaixo relembramos um resultado já anunciado no capítulo 2.

Proposição 3.3.12. *Seja \mathcal{P} um C -operada em um cosmo \mathcal{V} . Então o funtor esquecimento $\mathcal{U}_{\mathcal{P}} : \text{Alg}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathcal{V}^C$ cria coequalizadores que são reflexivos em \mathcal{V}^C .*

Demonstração. Veja [18]. \square

Sejam $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$, $\alpha := (\alpha_X, \alpha_Y)$, $\beta := (\beta_X, \beta_Y)$, $\pi := (\pi_X, \pi_Y)$ e $s := (s_X, s_Y)$. Então $(\varphi_!(X, Y), \pi)$ é um coequalizador reflexivo de α e β em $\text{top} \times \text{top}$ conforme observações anteriores.

Desde que $((X, Y)_3, (X, Y)_1)$ é a ação topológica livre gerada por

$$\left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_n \times X^n, \coprod_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_{m+1} \times X^m \times Y \right)$$

e por inspeção direta se verifica que α e β são morfismos em $\text{Alg}(\text{Act})$, nós obtemos o resultado abaixo em decorrência da proposição anterior.

Corolário 3.3.13. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Então $(\varphi_!(X, Y), \pi)$ é o coequalizador de α e β em $\text{Alg}(\text{Act})$.*

Agora nós verificaremos que $\varphi_!$ é de fato o funtor extensão associado a φ , mostrando que ele é adjunto à esquerda do funtor restrição φ^* .

Observação 3.3.14. *Lembremos que o funtor restrição φ^* é definido como identidade nos objetos e morfismos. As aplicações de estrutura em $\varphi^*(A, B)$, digamos $\overline{\mu}$ e $\overline{\nu}$, são definidas, neste caso, por*

$$\overline{\mu}(\tau, a_n) := a_1 \dots a_n$$

e

$$\overline{\nu}(\varsigma, a'_m, b) := a'_1 \dots a'_m b$$

para quaisquer $(\tau, a_n) \in \mathbb{W}_n \times A^n$ e $(\varsigma, a'_m, b) \in \mathbb{W}_{m+1} \times A^m \times B$.

Mostraremos agora que $\varphi_!$ é adjunto à esquerda de φ^* construindo a counidade $\varepsilon : \varphi_! \varphi^* \rightarrow 1$ e a unidade $\eta : 1 \rightarrow \varphi^* \varphi_!$ desta adjunção.

Começemos construindo a unidade da adjunção.

Definição 3.3.15. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Definimos a aplicação*

$$\eta_{(X, Y)} := (\eta_X, \eta_Y) : (X, Y) \rightarrow \varphi^* \varphi_!(X, Y)$$

por $\eta_X(x) := [x, *]$ e $\eta_Y(y) := [y]$ para qualquer $(x, y) \in (X, Y)$.

Proposição 3.3.16. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Então*

$$\eta_{(X, Y)} : (X, Y) \rightarrow \varphi^* \varphi_!(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}).$$

Demonstração. De fato, sejam $x_n \in X$, $\tau \in \mathbb{W}_n$, $y \in Y$ e $\varsigma \in \mathbb{W}_{n+1}$. Sejam μ'' e ν'' as aplicações de estrutura em $\varphi^*\varphi_!(X, Y)$ induzidas por $[*]$, $d_{(X,Y)}$ e $D_{(X,Y)}$. Então

$$\begin{aligned} \eta_Y \nu(\varsigma, x_n, y) &= \\ &= [\nu(x_n, y)] = \\ &= [x_n, y] = \\ &= ([x_1, *] \dots [x_n, *]) \cdot [y] = \\ &= \nu''(\varsigma, [x_1, *], \dots, [x_n, *], [y]) = \\ &= \nu''(1 \times (\eta_X)^n \times \eta_Y)(\varsigma, x_n, y). \end{aligned}$$

A prova de $\eta_X \mu(\tau, x_n) = \mu''(1 \times (\eta_X)^n)(\tau, x_n)$ é similar. \square

O próximo resultado finaliza a construção de η .

Proposição 3.3.17. *As aplicações $\eta_{(X,Y)}$, para cada $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$, definem uma transformação natural $\eta : 1 \rightarrow \varphi^*\varphi_!$.*

Demonstração. Seja $(f, g) : (X, Y) \rightarrow (X', Y')$. Precisamos mostrar que

$$(\varphi^*\varphi_!(f, g))\eta_{(X,Y)} = \eta_{(X',Y')}(f, g).$$

Seja $y \in Y$. Então

$$\begin{aligned} \widehat{g}\eta_Y(y) &= \\ &= [g(y)] = \\ &= \eta'_Y g(y). \end{aligned}$$

A prova de $\widehat{f}\eta_X = \eta_{X'} f$ é similar. \square

Construimos agora a counidade da adjunção.

Definição 3.3.18. *Seja $(A, B) \in \text{Alg}(\text{Act})$. Definimos a aplicação*

$$\widetilde{\varepsilon}_{(A,B)} := (\widetilde{\varepsilon}_A, \widetilde{\varepsilon}_B) : (\varphi^*(A, B)_4, \varphi^*(A, B)_2) \rightarrow (A, B)$$

por

$$\widetilde{\varepsilon}_A(a_n, *) := a_1 \dots a_n \text{ e } \widetilde{\varepsilon}_B(a'_m, b) := a'_1 \dots a'_m b$$

para quaisquer $((a_n, *), (a'_m, b)) \in (\varphi^*(A, B)_4, \varphi^*(A, B)_2)$.

Proposição 3.3.19. *Seja $(A, B) \in \text{Alg}(\text{Act})$. Então existe uma aplicação*

$$\varepsilon_{(A,B)} := (\varepsilon_A, \varepsilon_B) : \varphi_!\varphi^*(A, B) \rightarrow (A, B)$$

tal que

$$\varepsilon_A[a_n, *] = a_1 \dots a_n \text{ e } \varepsilon_B[a'_m, b] = a'_1 \dots a'_m b$$

para quaisquer $([a_n, *], [a'_m, b]) \in \varphi! \varphi^*(A, B)$.

Demonstração. Nós só precisamos verificar que: (a) $\tilde{\varepsilon}_A$ coequaliza $\tilde{\alpha}_{\varphi^*(A, B)}$ e $\tilde{\beta}_{\varphi^*(A, B)}$, (b) $\tilde{\varepsilon}_B$ coequaliza $\alpha_{\varphi^*(A, B)}$ e $\beta_{\varphi^*(A, B)}$. Provemos (b). Sejam μ'' e ν'' as aplicações de estrutura em $\varphi^*(A, B)$ e seja

$$w := ((\tau_1, a_{m_1}^1), \dots, (\tau_n, a_{m_n}^n), (\varsigma, a_p, b)) \in \varphi^*(A, B)_1.$$

Então

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_B \alpha_{\varphi^*(A, B)}(w) &= \\ &= (a_1^1 \dots a_{m_1}^1 \dots a_1^n \dots a_{m_n}^n a_1 \dots a_p) b = \\ &= ((a_1^1 \dots a_{m_1}^1) \dots (a_1^n \dots a_{m_n}^n)) ((a_1 \dots a_p) b) = \\ &= (\mu''(\tau_1, a_{m_1}^1) \dots \mu''(\tau_n, a_{m_n}^n)) \nu''(\varsigma, a_p, b) = \\ &= \tilde{\varepsilon}_B(\mu''(\tau_1, a_{m_1}^1), \dots, \mu''(\tau_n, a_{m_n}^n), \nu''(\varsigma, a_p, b)) = \\ &= \tilde{\varepsilon}_B \beta_{\varphi^*(A, B)}(w). \end{aligned}$$

A prova de $\tilde{\varepsilon}_A \tilde{\alpha}_{\varphi^*(A, B)} = \tilde{\varepsilon}_A \tilde{\beta}_{\varphi^*(A, B)}$ é similar. \square

Proposição 3.3.20. *Seja $(A, B) \in \text{Alg}(\text{Act})$ com unidade e , multiplicação M e ação L . Então*

$$\varepsilon_{(A, B)} : \varphi! \varphi^*(A, B) \rightarrow (A, B) \in \text{Alg}(\text{Act}).$$

Demonstração. Por construção nós temos que $\varepsilon_A[*] = e$. Sejam $(w := [a_n, *], w' := [a'_m, b]) \in \varphi! \varphi^*(A, B)$. Then

$$\begin{aligned} \varepsilon_B D_{\varphi^*(A, B)}(w, w') &= \\ &= (a_1 \dots a_n a'_1 \dots a'_m) b = \\ &= (a_1 \dots a_n)(a'_1 \dots a'_m b) = \\ &= L(a_1 \dots a_n, (a'_1 \dots a'_m) b) = \\ &= L(\varepsilon_A[a_n, *], \varepsilon_Y[a'_m, b]) = \\ &= L(\varepsilon_A \times \varepsilon_B)(w, w'). \end{aligned}$$

A prova de $\varepsilon_X d_{\varphi^*(A, B)} = M(\varepsilon_X \times \varepsilon_X)$ é similar. \square

O próximo resultado finaliza a construção de ε .

Proposição 3.3.21. *As aplicações $\varepsilon_{(A,B)}$, para cada $(A,B) \in \text{Alg}(\text{Act})$, definem uma transformação natural $\varepsilon : \varphi_! \varphi^* \rightarrow 1$.*

Demonstração. Seja $(u, v) : (A, B) \rightarrow (A', B')$. Precisamos mostrar que

$$\varepsilon_{(A',B')}(\varphi_! \varphi^*(u, v)) = (u, v)\varepsilon_{(A,B)}.$$

Seja $[a_n, b] \in \widehat{B}$. Então

$$\begin{aligned} \varepsilon_{B'} \widehat{v}[a_n, b] &= \\ &= u(a_1) \dots u(a_n) v(b) = \\ &= v(a_1 \dots a_n b) = \\ &= v \varepsilon_B[a_n, b]. \end{aligned}$$

A prova de $\varepsilon_{A'} \widehat{u} = u \varepsilon_A$ é similar. □

Finalmente nós mostramos que $\varphi_!$ é adjunto à esquerda de φ^* .

Proposição 3.3.22. *O funtor $\varphi_!$ é adjunto à esquerda do funtor φ^* com respeito ao par (ε, η) .*

$$(\varepsilon, \eta) : \varphi_! \dashv \varphi^*.$$

Demonstração. Precisamos verificar as equações counidade-unidade:

$$(\varepsilon \cdot \varphi_!)(\varphi_! \cdot \eta) = 1 \text{ e } (\varphi^* \cdot \varepsilon)(\eta \cdot \varphi^*) = 1$$

(onde o ponto significa o produto de Godement), isto é:

$$(a) \ (\varepsilon_{\varphi_!(X,Y)})(\varphi_! \eta_{(X,Y)}) = 1;$$

e

$$(b) \ (\varphi^* \varepsilon_{(A,B)})(\eta_{\varphi^*(A,B)}) = 1.$$

Provemos (a). Seja $[x_n, y] \in \widehat{Y}$ e lembremos que a ação de $\varphi_!(X, Y)$ é dada por concatenação de classes. Então

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\widehat{Y}} \widehat{\eta}_Y[x_n, y] &= \\ &= \varepsilon_{\widehat{Y}}[[x_1, *], \dots, [x_n, *], [y]] = \\ &= [x_n, y]. \end{aligned}$$

A prova de $\varepsilon_{\widehat{X}} \widehat{\eta}_X = 1$ é similar.

Agora provemos (b). Seja $b \in B$. Então $\varepsilon_B \eta_B(b) = \varepsilon_B[b] = b$. A prova de $\varepsilon_A \eta_A = 1$ é similar. \square

Com isso concluímos a construção explícita da retificação de Berger-Moerdijk e podemos aplicar as propriedades de equivalências de Quillen para estudá-la, conforme o teorema 2.5.13.

No que segue investigaremos o relacionamento entre uma h -ação e sua retificação \mathcal{BM} . Veremos que para h -ações (X, Y) cofibrantes, (X, Y) e sua retificação \mathcal{BM} são homotopicamente idênticas, conforme será precisado adiante. Do ponto de vista homotópico este é o conceito adequado de retificação.

Começamos com o seguinte lema geral de categorias modelo.

Lema 3.3.23. *Seja*

$$F : C \rightleftarrows D : G$$

uma equivalência de Quillen com unidade $\eta : 1 \rightarrow GF$, seja $X \in C$ e seja

$$(\overline{FX}, j : FX \rightarrow \overline{FX})$$

uma resolução fibrante de FX em D . Se X é cofibrante em C , então a composta

$$X \xrightarrow{\eta_X} GFX \xrightarrow{Gj} G\overline{FX}$$

é uma equivalência fraca em C .

Demonstração. Veja [28]. \square

Corolário 3.3.24. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ cofibrante. Então o morfismo*

$$\eta_{(X,Y)} : (X, Y) \rightarrow \varphi^* \varphi_!(X, Y)$$

é uma equivalência fraca em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$.

Demonstração. Segue do lema anterior desde que todos os objetos em $\text{Alg}(\text{Act})$ são fibrantes. \square

O resultado anterior será usado frequentemente nos nossos resultados de comparações de retificações e extensão, para h -ações, do teorema de reconhecimento de espaços de laços relativos de [26].

Corolário 3.3.25. *A retificação de Berger-Moerdijk de h -ações cofibrantes é efetiva.*

O próximo resultado diz que uma h -ação cofibrante é idêntica à sua retificação \mathcal{BM} a menos de homotopia. Como já observamos antes, este é o conceito adequado de retificação de uma álgebra homotópica no contexto de categorias modelo.

Corolário 3.3.26. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ cofibrante. Então (X, Y) e sua retificação de Berger-Moerdijk $\varphi_!(X, Y)$ (considerada como uma h -ação via $\varphi^* \varphi_!(X, Y)$) são isomorfas em $\text{HoAlg}(\mathbb{W}\text{Act})$.*

Demonstração. Lembremos que o funtor canônico

$$\gamma : \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}) \rightarrow \text{HoAlg}(\mathbb{W}\text{Act})$$

envia equivalências fracas em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ a isomorfismos em $\text{HoAlg}(\mathbb{W}\text{Act})$. \square

O último resultado desta seção está implícito no fato das categorias $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ e $\text{Alg}(\text{Act})$ serem Quillen equivalentes, contudo nós mostramos um isomorfismo explícito (a menos de uma escolha de resolução cofibrante) entre uma h-ação e uma ação topológica em $\text{HoAlg}(\mathbb{W}\text{Act})$.

Corolário 3.3.27. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Então (X, Y) é uma ação topológica a menos de homotopia. Mais precisamente, existe $(A, B) \in \text{Alg}(\text{Act})$ tal que (X, Y) é isomorfa a (A, B) (vista como uma h-ação via $\varphi^*(A, B)$) em $\text{HoAlg}(\mathbb{W}\text{Act})$.*

Demonstração. Seja $((X', Y'), i : (X', Y') \rightarrow (X, Y))$ uma resolução cofibrante de (X, Y) em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Então nós temos um zig-zag de equivalências fracas em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ pelo corolário 3.3.24:

$$(X, Y) \xleftarrow{i} (X', Y') \xrightarrow{\eta_{(X', Y')}} \varphi^* \varphi_!(X', Y') .$$

Por isso (X, Y) é isomorfo a $\varphi_!(X', Y')$ em $\text{HoAlg}(\mathbb{W}\text{Act})$. \square

É importante frisar que os quatro resultados anteriores não são consequências apenas de resultados gerais de categorias modelo, mas levam em consideração a particularidade de todos os objetos em $\text{Alg}(\text{Act})$ serem fibrantes.

3.4 A retificação de Boardman-Vogt

Nesta seção nós daremos outra retificação de uma h-ação, obtida da \mathbb{M} -construção de Boardman e Vogt [8]. Nós simplificamos a \mathbb{M} -construção observando que não é necessário dar cores distinguidas a raízes de árvores (como em [8]) ou, equivalentemente, dar comprimento a elas (como em [38]), basta restringir sutilmente as identificações desta construção.

A razão mais importante em considerarmos esse tipo de retificação é para mostrarmos que sob condições pouco restritivas uma h-ação é fracamente homotopicamente equivalente a uma ação de um espaço de laços em um espaço de laços relativos, estendendo o resultado de [26] dado para A_∞ -ações.

Esta retificação será denotada por $\Phi : \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}) \rightarrow \text{Alg}(\text{Act})$ e para cada h-ação (X, Y) , $\Phi(X, Y)$ será chamada a retificação de Boardman-Vogt ou a retificação \mathcal{BV} de (X, Y) .

O principal resultado desta seção é o seguinte: para qualquer h-ação (X, Y) , têm-se que (X, Y) é um retrato por deformação forte de $\Phi(X, Y)$ e logo a retificação \mathcal{BV} de uma h-ação qualquer é uma retificação ótima.

Começemos com a \mathbb{M} -construção da operada associativa As .

Seja \mathcal{T}'_n o conjunto definido por $\mathcal{T}'_n := \mathcal{T}_n$ se $n \neq 1$ e \mathcal{T}'_1 é \mathcal{T}_1 sem a (classe da) árvore trivial

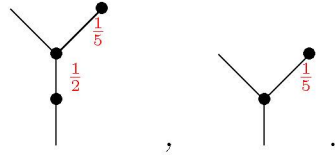
$$\begin{array}{c} | \\ \cdot \end{array}$$

Definição 3.4.1. Dada uma árvore τ , o nó de τ é o vértice oposto a raiz de τ , isto é, é o vértice que determina o tronco de τ junto com sua raiz.

Definição 3.4.2. A \mathbb{M} -construção da operada $\mathbb{A}s$ é denotada por $\mathbb{M}\mathbb{A}s$ e definida, para cada $n \in \mathbb{N}$, por

$$\mathbb{M}_n := (\mathbb{M}\mathbb{A}s)(n) := \left(\prod_{\tau \in \mathcal{T}'_n} [0, 1]^{|\tau|} \right) / \equiv'.$$

onde \equiv' é a relação de equivalência gerada pelas identificações da \mathbb{W} -construção, exceto no caso onde o nó tem grau 2. Então, por exemplo, as seguintes árvores métricas são identificadas na \mathbb{W} -construção mas não na \mathbb{M} -construção.



Nós denotamos um elemento $[\tau, t_1, \dots, t_{|\tau|}]' \in \mathbb{M}_n$ apenas por τ sempre que conveniente.

Observação 3.4.3.

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, nós temos uma aplicação bem definida

$$\mathbb{M}_n \rightarrow \mathbb{W}_n$$

$$[\tau, t_1, \dots, t_{|\tau|}]' \mapsto [\tau, t_1, \dots, t_{|\tau|}],$$

ou, por simplicidade,

$$\tau \mapsto \tau.$$

Isto segue de $\mathcal{T}'_n \subseteq \mathcal{T}_n$ e $\equiv' \subseteq \equiv$.

(b) Para quaisquer $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, $m \geq 0$ e $t \in [0, 1]$ nós temos aplicações bem definidas

$$\circ_i^t : \mathbb{M}_n \times \mathbb{W}_m \rightarrow \mathbb{M}_{n+m-1},$$

e

$$\circ_i^t : \mathbb{M}_n \times \mathbb{M}_m \rightarrow \mathbb{M}_{n+m-1},$$

induzidas por composições de árvores métricas, conforme apêndice B. Estas aplicações cumprem as propriedades operádicas usuais

$$\tau \circ^t (\tau_1 \circ^r (\tau_{k_1}^1), \dots, \tau_n \circ^r (\tau_{k_n}^n)) = (\tau \circ^t (\tau_n)) \circ^r (\tau_{k_1}^1, \dots, \tau_{k_n}^n).$$

A verificação de que estas aplicações são bem definidas é totalmente similar ao caso das aplicações

$$\circ_i^t : \mathbb{W}_n \times \mathbb{W}_m \rightarrow \mathbb{W}_{n+m-1}.$$

Em linguagem formal \mathbb{M} é um módulo à direita sobre \mathbb{W} (cf. [38]) e \mathbb{M} é uma operada sem unidade (cf. [36]).

Como no caso da retificação de Berger-Moerdijk, nós vamos construir a retificação de Boardman-Vogt via coequalizadores reflexivos a fim de darmos provas claras sobre aplicações construídas sobre espaços quocientes. Começamos definindo a segunda componente de $\Phi(X, Y)$. Nós utilizaremos as mesmas notações usadas na construção da retificação de Berger-Moerdijk, mas com o significado atualizado nesta seção.

Definição 3.4.4. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ e definamos*

$$(X, Y)_1 := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{M}_{n+1} \times \left(\coprod_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_m \times X^m \right)^n \times \left(\coprod_{p \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_{p+1} \times X^p \times Y \right)$$

e

$$(X, Y)_2 := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{M}_{n+1} \times X^n \times Y.$$

Seja

$$w := (\tau, (\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, (\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n), (\varsigma, x_{\underline{p}}, y)) \in (X, Y)_1$$

e definamos

$$\alpha_Y, \beta_Y : (X, Y)_1 \rightarrow (X, Y)_2$$

por:

$$\alpha_Y(w) := (\tau \circ (\tau_n, \varsigma), x_{\underline{m}_1}^1, \dots, x_{\underline{m}_n}^n, x_{\underline{p}}, y)$$

e

$$\beta_Y(w) := (\tau, \mu(\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n), \nu(\varsigma, x_{\underline{p}}, y)).$$

O coequalizador de α_Y e β_Y em top é denotado por \tilde{Y} . A projeção sobre \tilde{Y} é denotada por π_Y e nós escrevemos $\pi_Y(\tau, x_{\underline{n}}, y) := [\tau, x_{\underline{n}}, y]$ para qualquer $(\tau, x_{\underline{n}}, y) \in (X, Y)_2$.

$$(X, Y)_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_Y} \\ \xrightarrow{\beta_Y} \end{array} (X, Y)_2 \xrightarrow{\pi_Y} \tilde{Y}.$$

No que segue começamos a definir Φ nos morfismos

Proposição 3.4.5. *Seja $(f, g) : (X, Y) \rightarrow (X', Y') \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Então existe uma aplicação contínua*

$$\tilde{g} : \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}'$$

tal que

$$\tilde{g}[\tau, x_{\underline{n}}, y] = [\tau, f(x_{\underline{n}}), g(y)]$$

para qualquer $(\tau, x_{\underline{n}}, y) \in (X, Y)_2$.

Demonstração. Definamos

$$\hat{g} : (X, Y)_2 \rightarrow \tilde{Y}'$$

por

$$\widehat{g}(\tau, x_n, y) := [\tau, f(x_n), g(y)].$$

para qualquer $(\tau, x_n, y) \in (X, Y)_2$. Mostraremos que \widehat{g} coequaliza α_Y e β_Y e por isso existe uma única aplicação que fatora \widehat{g} ao longo de π_Y . De fato, seja

$$w := (\tau, (\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, (\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n), (\varsigma, x_p, y)) \in (X, Y)_1.$$

Então:

$$\begin{aligned} \widehat{g}\alpha_Y(w) &= \\ &= \widehat{g}(\tau \circ (\tau_n, \varsigma), x_{\underline{m}_1}^1, \dots, x_{\underline{m}_n}^n, x_p, y) = \\ &= [\tau \circ (\tau_1, \dots, \tau_n, \varsigma), f(x_{\underline{m}_1}^1), \dots, f(x_{\underline{m}_n}^n), f(x_p), g(y)] = \\ &= [\tau, \mu'(\tau_1, f(x_{\underline{m}_1}^1)), \dots, \mu'(\tau_n, f(x_{\underline{m}_n}^n)), \nu'(\varsigma, f(x_p), g(y))] = \\ &= [\tau, f\mu(\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, f\mu(\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n), g\nu(\varsigma, x_p, y)] = \\ &= \widehat{g}(\tau, \mu(\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n), \nu(\varsigma, x_p, y)) = \\ &= \widehat{g}\beta_Y(w). \end{aligned}$$

□

Observação 3.4.6. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Considere a aplicação*

$$s_Y : (X, Y)_2 \rightarrow (X, Y)_1$$

definida por

$$s_Y(\tau, x_n, y) := (\tau, (\delta_1, x_1), \dots, (\delta_1, x_n), (\delta_1, y)),$$

para qualquer $(\tau, x_n, y) \in (X, Y)_2$. Desde que $\mu(\delta_1, x) = x$ e $\nu(\delta_1, y) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, é imediato que $\alpha_Y s_Y = \beta_Y s_Y$ e então (\widetilde{Y}, π_Y) é coequalizador reflexivo em top .

Agora finalizamos a construção de Φ nos objetos.

Definição 3.4.7. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ e Definamos*

$$(X, Y)_3 := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{M}_n \times \left(\coprod_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_m \times X^m \right)^n$$

e

$$(X, Y)_4 := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{M}_n \times X^n.$$

Seja

$$w := (\tau, (\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, (\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n)) \in (X, Y)_3$$

e definamos

$$\alpha_X, \beta_X : (X, Y)_3 \rightarrow (X, Y)_4$$

por:

$$\alpha_X(w) := (\tau \circ (\tau_n), x_{\underline{m}_1}^1, \dots, x_{\underline{m}_n}^n)$$

e

$$\beta_X(w) := (\tau, \mu(\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n)).$$

O coequalizador de α_X e β_X em top é denotado por \tilde{X} . A projeção \tilde{X} é denotada por π_X e nós escrevemos $\pi_X(\tau, x_n) := [\tau, x_n]$ para qualquer $(\tau, x_n) \in (X, Y)_4$.

$$(X, Y)_3 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_X} \\ \xrightarrow{\beta_X} \end{array} (X, Y)_4 \xrightarrow{\pi_X} \tilde{X}.$$

A prova do resultado abaixo é similar as provas anteriores.

Proposição 3.4.8. *Seja $(f, g) : (X, Y) \rightarrow (X', Y') \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Com respeito a construção de \tilde{X} nós temos o seguinte:*

(a) *Existe uma aplicação contínua*

$$\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}'$$

tal que

$$\tilde{f}[\tau, x_n] := [\tau, f(x_n)]$$

para qualquer $(\tau, x_n) \in (X, Y)_4$;

(b) *A aplicação*

$$s_X : (X, Y)_4 \rightarrow (X, Y)_3$$

definida por

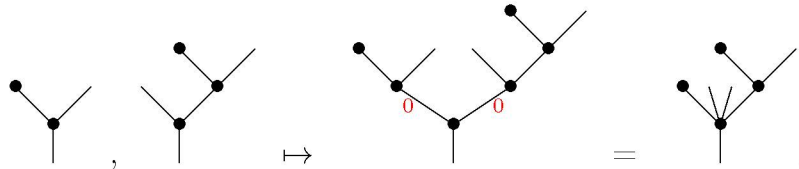
$$s_X(\tau, x_n, y) := ((\delta_1, x_1), \dots, (\delta_1, x_n), *),$$

para qualquer $(\tau, x_n) \in (X, Y)_4$, é uma seção comum de α_X e β_X e então (\tilde{X}, π_X) é um coequalizador reflexivo em top .

A fim de definir uma estrutura de ação topológica sobre a retificação \mathcal{BM} nós primeiro definimos uma estrutura de monoide topológico sobre $\coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{M}_n$. Para tal finalidade nós introduzimos a concatenação de árvores de [8] em uma linguagem formal.

Definição 3.4.9. *Sejam $\tau \in \mathbb{M}_n$ e $\varsigma \in \mathbb{M}_m$. A concatenação de τ e ς é denotada por $\tau\varsigma$ e definida por*

$$\tau\varsigma := \delta_2 \circ^0 (\tau, \varsigma) \in \mathbb{M}_{n+m}.$$



Proposição 3.4.10. *A concatenação de árvores define uma estrutura de ação topológica sobre o par*

$$\left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{M}_n, \coprod_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{M}_{m+1} \right),$$

onde a unidade é a 0-corolla δ_0 .

Demonstração. Sejam $\tau, \varsigma, \rho \in \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{M}_n$. Então

$$\begin{aligned} (\tau \varsigma) \rho &= \\ &= \delta_2 \circ^0 (\delta_2 \circ^0 (\tau, \varsigma), \rho) = \\ &= \delta_2 \circ^0 (\delta_2 \circ^0 (\tau, \varsigma), \delta_1 \circ^0 \rho) = \\ &= (\delta_2 \circ^0 (\delta_2, \delta_1)) \circ^0 (\tau, \varsigma, \rho). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tau(\varsigma \rho) &= \\ &= \delta_2 \circ^0 (\tau, \delta_2 \circ^0 (\varsigma, \rho)) = \\ &= \delta_2 \circ^0 (\delta_1 \circ^0 \tau, \delta_2 \circ^0 (\varsigma, \rho)) = \\ &= (\delta_2 \circ^0 (\delta_1, \delta_2)) \circ^0 (\tau, \varsigma, \rho). \end{aligned}$$

mas $\delta_2 \circ^0 (\delta_2, \delta_1) = \delta_3 = \delta_2 \circ^0 (\delta_1, \delta_2)$.

Finalmente, $\tau \delta_0 = \delta_2 \circ^0 (\tau, \delta_0) = \delta_1 \circ^0 \tau = \tau$. O mesmo argumento mostra que $\delta_0 \tau = \tau$. \square

Corolário 3.4.11. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Definamos*

$$d : (X, Y)_4 \times (X, Y)_4 \rightarrow (X, Y)_4$$

$$((\tau, x_{\underline{n}}), (\varsigma, x'_{\underline{m}})) \mapsto (\tau \varsigma, x_{\underline{n}}, x'_{\underline{m}})$$

e

$$D : (X, Y)_4 \times (X, Y)_2 \rightarrow (X, Y)_2$$

$$((\tau, x_{\underline{n}}), (\varsigma, x'_{\underline{m}}, y)) \mapsto (\tau \varsigma, x_{\underline{n}}, x'_{\underline{m}}, y).$$

Então $((X, Y)_4, (X, Y)_2) \in \text{Alg}(\text{Act})$ junto com unidade δ_0 , multiplicação d e ação D .

Agora nós mostraremos que a estrutura de ação topológica anterior pode ser transferida para (\tilde{X}, \tilde{Y}) . Precisamos de uma lema antes.

Lema 3.4.12. *Sejam $n, m \geq 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, $\tau \in \mathbb{M}_n$, $\tau' \in \mathbb{M}_m$,*

$\tau_i \in \mathbb{M}_{n_i}$ e $\tau'_j \in \mathbb{M}_{m_j}$. Então

$$(\tau \circ (\tau_n))(\tau' \circ (\tau'_m)) = \tau\tau' \circ (\tau_n, \tau'_m).$$

Demonstração. Segue das propriedades operádicas das composições:

$$\begin{aligned} & (\tau \circ (\tau_n))(\tau' \circ (\tau'_m)) = \\ & = \delta_2 \circ^0 (\tau \circ (\tau_n), \tau' \circ (\tau'_m)) = \\ & = (\delta_2 \circ^0 (\tau, \tau')) \circ (\tau_n, \tau'_m) = \\ & = \tau\tau' \circ (\tau_n, \tau'_m). \end{aligned}$$

□

Proposição 3.4.13. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Então existem aplicações*

$$d_{(X,Y)} : \tilde{X} \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$$

e

$$D_{(X,Y)} : \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Y}$$

tais que

$$d_{(X,Y)}([\tau, x_n], [\tau', x'_m]) = [\tau\tau', x_n, x'_m]$$

e

$$D_{(X,Y)}([\tau, x_n], [\varsigma, x''_p, y]) = [\tau\varsigma, x_n, x''_p, y],$$

para quaisquer $(\tau, x_n), (\tau', x'_m) \in (X, Y)_4$ e $(\varsigma, x''_p, y) \in (X, Y)_2$.

Demonstração. Segue do lema 3.3.7, observação 3.4.6 e proposição 3.4.8 que nós só precisamos verificar que: (a) $\pi_X d$ coequaliza $\alpha_X \times \alpha_X$ e $\beta_X \times \beta_X$, (b) $\pi_Y D$ coequaliza $\alpha_X \times \alpha_Y$ e $\beta_X \times \beta_Y$. Provemos (b). Sejam

$$w := (\tau, (\tau_1, x_{m_1}^1), \dots, (\tau_n, x_{m_n}^n)) \in (X, Y)_3$$

e

$$w' := (\tau', (\tau'_1, x_{l_1}^{l_1}), \dots, (\tau'_k, x_{l_k}^{l_k}), (\varsigma, x_p, y)) \in (X, Y)_1.$$

Segue que:

$$\begin{aligned} & \pi_Y D(\alpha_X \times \alpha_Y)(w, w') = \\ & = [(\tau \circ (\tau_n))(\tau' \circ (\tau'_k, \varsigma)), x_{m_1}^1, \dots, x_{m_n}^n, x_{l_1}^{l_1}, \dots, x_{l_k}^{l_k}, x_p, y] = \\ & = [\tau\tau' \circ (\tau_n, \tau'_k, \varsigma), x_{m_1}^1, \dots, x_{m_n}^n, x_{l_1}^{l_1}, \dots, x_{l_k}^{l_k}, x_p, y] = \\ & = [\tau\tau', \mu(\tau_1, x_{m_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{m_n}^n), \mu(\tau'_1, x_{l_1}^{l_1}), \dots, \mu(\tau'_k, x_{l_k}^{l_k}), \nu(\varsigma, x_p, y)] = \\ & = \pi_Y D(U, V) = \end{aligned}$$

(onde $U := (\tau, \mu(\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n))$)

e

$V := (\tau', \mu(\tau'_1, x_{\underline{l}_1}^1), \dots, \mu(\tau'_k, x_{\underline{l}_k}^k), \nu(\varsigma, x_{\underline{p}}, y))$

$= \pi_Y D(\beta_X \times \beta_Y)(w, w').$

A prova de $\pi_X d(\alpha_X \times \alpha_X) = \pi_X d(\beta_X \times \beta_X)$ é similar. \square

Corolário 3.4.14. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Então $(\tilde{X}, \tilde{Y}) \in \text{Alg}(\text{Act})$ junto com unidade $[\delta_0]$, multiplicação $d_{(X,Y)}$ e ação $D_{(X,Y)}$.*

O próximo resultado conclui a construção da retificação de Boardman-Vogt.

Proposição 3.4.15. *Seja $(f, g) : (X, Y) \rightarrow (X', Y') \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Então*

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) : (\tilde{X}, \tilde{Y}) \rightarrow (\tilde{X}', \tilde{Y}') \in \text{Alg}(\text{Act}).$$

Demonstração. por construção nós temos que $\tilde{f}[\delta_1] = [\delta_1]$. Sejam $u := [\tau, x_{\underline{n}}] \in \tilde{X}$ e $v := [\varsigma, x'_{\underline{m}}, y] \in \tilde{Y}$. Então

$$\begin{aligned} \tilde{g}D_{(X,Y)}(u, v) &= \\ &= [\tau\varsigma, f(x_{\underline{n}}), f(x'_{\underline{m}}), g(y)] = \\ &= D_{(X',Y')}([\tau, f(x_{\underline{n}})], [\varsigma, f(x'_{\underline{m}}), g(y)]) = \\ &= D_{(X',Y')}(\tilde{f} \times \tilde{g})(u, v). \end{aligned}$$

A prova de $\tilde{f}d_{(X,Y)} = d_{(X',Y')}(\tilde{f} \times \tilde{f})$ é similar. \square

Corolário 3.4.16. *A correspondência*

$$\Phi(X, Y) := (\tilde{X}, \tilde{Y})$$

$$\Phi(f, g) := (\tilde{f}, \tilde{g})$$

define um funtor

$$\Phi : \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}) \rightarrow \text{Alg}(\text{Act})$$

chamado de funtor retificação de Boardman-Vogt ou funtor retificação \mathcal{BV} .

Demonstração. Segue diretamente das definições de \tilde{f} e \tilde{g} . \square

Finalizamos esta seção observando que a retificação de Boardman-Vogt também é um coequalizador em $\text{Alg}(\text{Act})$.

Sejam $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$, $\alpha := (\alpha_X, \alpha_Y)$, $\beta := (\beta_X, \beta_Y)$, $\pi := (\pi_X, \pi_Y)$ e $s := (s_X, s_Y)$. Então $(\Phi(X, Y), \pi)$ é um coequalizador reflexivo de α e β em $\text{top} \times \text{top}$ conforme

observações anteriores. Desde que $((X, Y)_3, (X, Y)_1)$ também tem uma estrutura de ação topológica induzida pela concatenação de árvores e concatenação de uplas e se verifica por inspeção direta que α e β são morfismos em $\text{Alg}(\text{Act})$, nós obtemos o seguinte resultado em decorrência da proposição 3.3.12.

Corolário 3.4.17. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Então $(\Phi(X, Y), \pi)$ é o coequalizador de α e β em $\text{Alg}(\text{Act})$.*

Agora mostraremos que qualquer h-ação (X, Y) é um retrato por deformação forte de $\Phi(X, Y)$ e então a retificação \mathcal{BV} de qualquer h-ação é ótima.

A próxima definição e o resultado que a segue definem as inversas homotópicas $\iota_{(X, Y)}$ e $r_{(X, Y)}$ para cada h-ação (X, Y) .

Definição 3.4.18. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Definimos a aplicação*

$$\iota := (\iota_X, \iota_Y) : (X, Y) \rightarrow \Phi(X, Y)$$

por

$$\iota_X(x) := [\delta_1, x] \text{ e } \iota_Y(y) := [\delta_1, y]$$

para qualquer $(x, y) \in (X, Y)$.

Seja também

$$\bar{r} := (\bar{r}_X, \bar{r}_Y) : ((X, Y)_4, (X, Y)_2) \rightarrow (X, Y)$$

a aplicação definida por

$$\bar{r}_X(\tau, x_n) := \mu(\tau, x_n)$$

e

$$\bar{r}_Y(\varsigma, x'_m, y) := \nu(\varsigma, x'_m, y),$$

para quaisquer $(\tau, x_n) \in (X, Y)_4$ e $(\varsigma, x'_m, y) \in (X, Y)_2$.

Proposição 3.4.19. *A aplicação \bar{r} coequaliza α e β , e então existe uma única aplicação*

$$r := (r_X, r_Y) : \Phi(X, Y) \rightarrow (X, Y)$$

tal que $r\pi = \bar{r}$.

Demonstração. A igualdade $\bar{r}\alpha = \bar{r}\beta$ segue diretamente das propriedades de μ e ν . Por exemplo, para qualquer $w \in (X, Y)_1$ nós temos que

$$\begin{aligned} \bar{r}_Y\alpha_Y(w) &= \\ &= \nu(\tau \circ (\tau_n, \varsigma), x_{\underline{m}_1}^1, \dots, x_{\underline{m}_n}^n, x_{\underline{p}}, y) = \\ &= \nu(\tau, \mu(\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n), \nu(\varsigma, x_{\underline{p}}, y)) = \\ &= \bar{r}_Y\beta_Y(w). \end{aligned}$$

□

Definição 3.4.20. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Definimos a aplicação*

$$\overline{H} := (\overline{H}_X, \overline{H}_Y) : ([0, 1] \times (X, Y)_4, [0, 1] \times (X, Y)_2) \rightarrow \Phi(X, Y)$$

por

$$\overline{H}_X(t, \tau, x_n) := [\delta_1 \circ^t \tau, x_n]$$

e

$$\overline{H}_Y(s, \varsigma, x'_m, y) := [\delta_1 \circ^s \varsigma, x'_m, y],$$

para quaisquer $(t, \tau, x_n) \in [0, 1] \times (X, Y)_4$ e $(s, \varsigma, x'_m, y) \in [0, 1] \times (X, Y)_2$.

Proposição 3.4.21. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. A aplicação \overline{H} coequaliza*

$$(1 \times \alpha_X, 1 \times \alpha_Y) \text{ e } (1 \times \beta_X, 1 \times \beta_Y),$$

e então existe uma única aplicação

$$H := (H_X, H_Y) : ([0, 1] \times \tilde{X}, [0, 1] \times \tilde{Y}) \rightarrow \Phi(X, Y)$$

tal que $H_X(1 \times \pi_X) = \overline{H}_X$ e $H_Y(1 \times \pi_Y) = \overline{H}_Y$.

Demonstração. Seja $(s, w) \in [0, 1] \times (X, Y)_1$, então

$$\begin{aligned} \overline{H}_Y(1 \times \alpha_Y)(s, w) &= \\ &= [\delta_1 \circ^s (\tau \circ (\tau_n, \varsigma)), x_{m_1}^1, \dots, x_{m_n}^n, x_p, y] = \\ &= [(\delta_1 \circ^s \tau) \circ (\tau_n, \varsigma), x_{m_1}^1, \dots, x_{m_n}^n, x_p, y] = \\ &= [\delta_1 \circ^s \tau, \mu(\tau_1, x_{m_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{m_n}^n), \nu(\varsigma, x_p, y)] = \\ &= \overline{H}_Y(1 \times \beta_Y)(s, w). \end{aligned}$$

A prova de $\overline{H}_X(1 \times \alpha_X) = \overline{H}_X(1 \times \beta_X)$ é similar. □

O próximo resultado é a principal propriedade da retificação de Boardman-Vogt, pois diz que uma h-ação qualquer é homotopicamente equivalente a uma ação topológica, sua retificação \mathcal{BV} .

É possível mostrar que o mergulho topológico $\iota : (X, Y) \rightarrow \Phi(X, Y)$ é um morfismo em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ a menos de homotopia, porém segundo uma definição que não conseguimos relacionar com o conceito de morfismo A_∞ -equivariante, a ser definido na próxima seção.

Teorema 3.4.22. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Então (X, Y) é um retrato por deformação forte de $\Phi(X, Y)$ em $\text{top} \times \text{top}$.*

Demonstração. Segue diretamente que $ri = 1$ e então em particular nós temos que (X, Y) e $(\iota_X(X), \iota_Y(Y))$ são homeomorfos em $\text{top} \times \text{top}$. Ademais, para quaisquer $[\tau, x_n, y] \in \tilde{Y}$, $y' \in Y$ e $t \in [0, 1]$ nós temos

$$H_Y(0, [\tau, x_n, y]) = [\delta_1 \circ^0 \tau, x_n, y] = [\tau, x_n, y],$$

$$H_Y(1, [\tau, x_n, y]) = [\delta_1 \circ^1 \tau, x_n, y] = [\delta_1, \nu(\tau, x_n, y)] = \iota_Y r_Y [\tau, x_n, y]$$

e

$$H_Y(t, \iota_Y(y')) = [\delta_1 \circ^t \delta_1, y'] = [\delta_1, y'] = \iota_Y(y').$$

Então H_Y é uma homotopia entre 1 e $\iota_Y r_Y$ relativa a $\iota_Y(Y)$.

Similarmente, H_X é uma homotopia entre 1 e $\iota_X r_X$ relativa a $\iota_X(X)$. \square

3.5 Comparando as retificações \mathcal{BM} e \mathcal{BV}

Nesta seção nós mostraremos que as retificações de Berger-Moerdijk e Boardman-Vogt estão estreitamente relacionadas do ponto de vista tanto funtorial quanto homotópico. Mostraremos que existe uma transformação natural $\theta : \Phi \rightarrow \varphi_!$ que sobre h-ações cofibrantes (X, Y) induz equivalências fracas $\theta_{(X, Y)} : \Phi(X, Y) \rightarrow \varphi_!(X, Y)$ em $\text{Alg}(\text{Act})$. Por isso as retificações \mathcal{BM} e \mathcal{BV} de h-ações cofibrantes são homotopicamente idênticas.

Proposição 3.5.1. *Existe uma transformação natural*

$$\theta : \Phi \rightarrow \varphi_!$$

definida, para cada $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$, por

$$\theta := (\theta_X, \theta_Y) : \Phi(X, Y) \rightarrow \varphi_!(X, Y)$$

$$\theta([\tau, x_n], [\varsigma, x'_m, y]) := ([x_n, *], [x'_m, y]),$$

para qualquer $([\tau, x_n], [\varsigma, x'_m, y]) \in \Phi(X, Y)$.

Demonstração. Usaremos sobrescritos Φ e $\varphi_!$ a fim de distinguir as notações comuns usadas para construir esses funtores. Considere a aplicação contínua

$$\bar{\theta}_{(X, Y)} := (\bar{\theta}_X, \bar{\theta}_Y) : ((X, Y)_4^\Phi, (X, Y)_2^\Phi) \rightarrow \varphi_!(X, Y)$$

definida por

$$\bar{\theta}_{(X, Y)}((\tau, x_n), (\varsigma, x'_m, y)) := ([x_n, *], [x'_m, y])$$

para qualquer $((\tau, x_n), (\varsigma, x'_m, y)) \in ((X, Y)_4^\Phi, (X, Y)_2^\Phi)$.

As afirmações abaixo são verificadas utilizando os mesmos argumentos das provas nas duas seções anteriores, por isso as provas serão omitidas.

A aplicação $\bar{\theta}_{(X, Y)}$ coequaliza α^Φ e β^Φ , e logo pode ser fatorada ao longo de π^Φ .

Seja $(f, g) : (X, Y) \rightarrow (X', Y') \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Por construção $\theta_X[\delta_1] = [*]$ e além disso é rotina verificar que $\theta_{(X, Y)}$ é compatível com

$$d_{(X, Y)}^\Phi, D_{(X, Y)}^\Phi, d_{(X, Y)}^{\varphi_!} \text{ e } D_{(X, Y)}^{\varphi_!},$$

assim $\theta_{(X, Y)} \in \text{Alg}(\text{Act})$. A naturalidade de $\theta_{(X, Y)}$ é uma consequência imediata das definições de $\Phi(f, g)$ e $\varphi_!(f, g)$. \square

Teorema 3.5.2. *Seja (X, Y) uma h -ação cofibrante. Então*

$$\theta_{(X,Y)} : \Phi(X, Y) \rightarrow \varphi_!(X, Y)$$

é uma equivalência fraca em $\text{Alg}(\text{Act})$.

Demonstração. De fato, desde que (X, Y) é cofibrante a unidade (da adjunção $\varphi_! \dashv \varphi^*$ em (X, Y))

$$\eta_{(X,Y)} : (X, Y) \rightarrow \varphi^* \varphi_!(X, Y)$$

é em particular uma equivalência homotópica fraca em top (cf. corolário 3.3.24). Ademais e o mergulho topológico $\iota : (X, Y) \rightarrow \Phi(X, Y)$ é uma equivalência homotópica (cf. teorema 3.4.22). Desde que as restrições das aplicações

$$\bar{\theta}_{(X,Y)} \text{ e } \pi^\Phi$$

sobre $(\{\delta_1\} \times X, \{\delta_1\} \times Y)$ são isomorfas respectivamente a $\eta_{(X,Y)}$ e ι , segue então da propriedade 2-de-3 que $\theta_{(X,Y)}$ é uma equivalência homotópica fraca, desde que $\theta_{(X,Y)} \pi^\Phi = \bar{\theta}_{(X,Y)}$.

$$\begin{array}{ccc} \{\delta_1\} \times X & \xrightarrow{\simeq} & X \xrightarrow{\iota_X} \tilde{X} \\ \downarrow \simeq & & \uparrow \pi_X^\Phi \\ \bar{\theta}_X \downarrow & & \uparrow \theta_X \\ X & \xrightarrow{\eta_X} & \hat{X} \end{array}$$

□

Corolário 3.5.3. *Seja (X, Y) uma h -ação cofibrante. Então as retificações de Boardman-Vogt $\Phi(X, Y)$ e Berger-Moerdijk $\varphi_!(X, Y)$ são isomorfas em $\text{HoAlg}(\text{Act})$.*

3.6 A retificação \mathcal{HLS}

Para que possamos comparar as retificações \mathcal{BM} e \mathcal{BV} com a retificação \mathcal{HLS} , nesta seção nós daremos uma breve descrição desta última. A fim de melhorarmos os resultados de comparações de retificações nós começaremos lembrando o conceito de um morfismo A_∞ -equivariante entre uma A_∞ -ação e uma ação topológica e então estenderemos este conceito para h -ações.

Morfismos A_∞ -equivariantes são introduzidos em [26] como uma extensão natural do conceito de A_∞ -maps entre um A_∞ -espaço e um monoide topológico (cf. [8, 26, 55]) e eles são morfismos em $\text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ a menos de homotopia conforme explicaremos adiante.

Definição 3.6.1. *Sejam $(X, Y) = (X, Y, \mu, \nu) \in \text{Alg}(\text{Act}_\infty)$, $(A, B) \in \text{Alg}(\text{Act})$, $(f, g) : (X, Y) \rightarrow (A, B) \in \text{top} \times \text{top}$ e e a unidade de A . Dizemos que (f, g) é um morfismo*

A_∞ -equivariante se existir uma aplicação contínua

$$(F, G) : \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_{n+1} \times X^n, \coprod_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_{m+2} \times X^m \times Y \right) \rightarrow (A, B)$$

tal que

$$(a) F(\delta_1) = e, F(\delta_2, x) = f(x) \text{ e } G(\delta_2, y) = g(y);$$

$$(b) F(\tau \circ (\rho, \tau_n), x_q, x_{m_1}^1, \dots, x_{m_n}^n) = F(\rho, x_q) F(\tau, \mu(\tau_1, x_{m_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{m_n}^n));$$

$$(c) G(\tau \circ (\rho, \tau_n, \varsigma), x_q, x_{m_1}^1, \dots, x_{m_n}^n, x'_p, y) = \\ = F(\rho, x_q) G(\tau, \mu(\tau_1, x_{m_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{m_n}^n), \nu(\varsigma, x'_p, y)),$$

para quaisquer números naturais, e para quaisquer $\rho \in \mathbb{K}_{q+1}$, $\tau \in \mathbb{K}_{n+1}$, $\tau_i \in \mathbb{K}_{m_i}$, $\varsigma \in \mathbb{K}_{p+1}$ e elementos em X e Y .

No que segue nós justificamos por que morfismos A_∞ -equivariantes são chamados de morfismos a menos de homotopia em $\text{Alg}(\text{Act}_\infty)$.

Observação 3.6.2. Considere a notação anterior. É possível mostrar que se $(f, g) : (X, Y) \rightarrow (A, B)$ é um morfismo A_∞ -equivariante, então

$$(f, g) : (X, Y) \rightarrow \varphi^*(A, B)$$

é a morfismo em $\text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ a menos de homotopia, isto é, para quaisquer $\tau \in \mathbb{K}_n$, $\varsigma \in \mathbb{K}_{m+1}$ ($n, m \geq 0$) e para quaisquer elementos em X e Y nós temos homotopias conectando:

$$(a) f\mu(\tau, x_1, \dots, x_n) \approx f(x_1) \dots f(x_n)$$

e

$$(b) g\nu(\varsigma, x'_1, \dots, x'_m, y) \approx f(x'_1) \dots f(x'_m)g(y).$$

Adeais, se $e_X := \mu(\delta_0)$ é a unidade de (X, Y) , então

$$f(e_X) = eF(\delta_2, \mu(\delta_0)) = F(\delta_1)F(\delta_2, \mu(\delta_0)) = F(\delta_2 \circ (\delta_1, \delta_0)) = F(\delta_1) = e.$$

Agora nós extendemos o conceito de morfismo A_∞ -equivariante para h-ações. A definição é similar ao caso de A_∞ -ações.

Definição 3.6.3. Sejam $(X, Y) = (X, Y, \mu, \nu) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$, $(A, B) \in \text{Alg}(\text{Act})$, $(f, g) : (X, Y) \rightarrow (A, B) \in \text{top} \times \text{top}$ e e a unidade de A . Nós dizemos que (f, g) é um morfismo A_∞ -equivariante se existir uma aplicação contínua

$$(F, G) : \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_{n+1} \times X^n, \coprod_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_{m+2} \times X^m \times Y \right) \rightarrow (A, B)$$

tal que

- (a) $F(\delta_1) = e$, $F(\delta_2, x) = f(x)$ e $G(\delta_2, y) = g(y)$;
- (b) $F(\tau \circ (\rho, \tau_n), x_q, x_{\underline{m}_1}^1, \dots, x_{\underline{m}_n}^n) = F(\rho, x_q)F(\tau, \mu(\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n))$;
- (c) $G(\tau \circ (\rho, \tau_n, \varsigma), x_q, x_{\underline{m}_1}^1, \dots, x_{\underline{m}_n}^n, x'_p, y) =$
 $= F(\rho, x_q)G(\tau, \mu(\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n), \nu(\varsigma, x'_p, y)),$

para quaisquer números naturais, para quaisquer $\rho \in \mathbb{W}_{q+1}$, $\tau \in \mathbb{W}_{n+1}$, $\tau_i \in \mathbb{W}_{m_i}$, $\varsigma \in \mathbb{W}_{p+1}$ e para quaisquer elementos em X e Y .

Observação 3.6.4. A observação anterior continua valendo se substituirmos $\text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ por $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Em particular, desde que $e_X := \mu(\delta_0) \in X$ é a unidade homotópica de X , então f preserva a unidade homotópica a menos de homotopia: $f(e_X) \approx e$.

O resultado abaixo diz que o funtor restrição $\xi^* : \text{Alg}(\text{Act}_\infty) \rightarrow \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ também preserva morfismos A_∞ -equivariantes. Este resultado será usado nas comparações das retificações \mathcal{BM} e \mathcal{BV} com a retificação \mathcal{HLS} .

Proposição 3.6.5. Sejam $(X, Y) = (X, Y, \mu, \nu) \in \text{Alg}(\text{Act}_\infty)$, $(A, B) \in \text{Alg}(\text{Act})$ e $(f, g) : (X, Y) \rightarrow (A, B)$ um morfismo A_∞ -equivariante com respeito a uma aplicação (F, G) . Então

$$(f, g) : \xi^*(X, Y) \rightarrow (A, B)$$

é um morfismo A_∞ -equivariante com respeito a aplicação

$$(F', G') := \left(F \circ \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \xi_{n+1} \times 1^n \right), G \circ \left(\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \xi_{m+2} \times 1^m \times 1 \right) \right).$$

Demonstração. A demonstração é por inspeção direta desde que ξ preserva composições de árvores e $\xi_1(\delta_1) = \delta_1$ e $\xi_2(\delta_2) = \delta_2$, pois $\mathbb{K}_1 = \{\delta_1\}$ e $\mathbb{K}_2 = \{\delta_2\}$. Por exemplo, sejam μ^ξ e ν^ξ as aplicações de estrutura induzidas em $\xi^*(X, Y) = (X, Y)$. Então para quaisquer elementos no domínio de F' :

$$\begin{aligned} F'(\tau \circ (\rho, \tau_n), x_q, x_{\underline{m}_1}^1, \dots, x_{\underline{m}_n}^n) &= \\ &= F(\xi(\tau \circ (\rho, \tau_n)), x_q, x_{\underline{m}_1}^1, \dots, x_{\underline{m}_n}^n) = \\ &= F(\xi\tau \circ (\xi\rho, \xi\tau_n), x_q, x_{\underline{m}_1}^1, \dots, x_{\underline{m}_n}^n) = \\ &= F(\xi\rho, x_q)F(\xi\tau, \mu(\xi\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, \mu(\xi\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n)) = \\ &= F'(\rho, x_q)F'(\tau, \mu^\xi(\tau_1, x_{\underline{m}_1}^1), \dots, \mu^\xi(\tau_n, x_{\underline{m}_n}^n)). \end{aligned}$$

□

No que segue daremos uma concisa descrição da retificação \mathcal{HLS} .

Em [26] é provado que sob certas hipóteses uma A_∞ -ação (X, Y) é fracamente homotopicamente equivalente à uma ação topológica de um tipo muito especial: uma ação um

espaço de laços em um espaço de laços relativos. Além disso é provado que a equivalência fraca em questão é A_∞ equivariante, o que torna o resultado ainda mais interessante do ponto de vista homotópico.

Para fácil referência chamaremos tal ação topológica de retificação \mathcal{HLS} de (X, Y) .

A seguinte definição é uma simplificação da construção bar bilateral dada em [26] desde que não precisamos falar em A_∞ -ações à direita para o objetivo desta exposição.

Definição 3.6.6. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ com aplicações de estrutura μ e ν . O espaço de órbitas homotópicas de (X, Y) é denotado por $Y // X$ e definido por*

$$Y // X := \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}_{n+2} \times X^n \times Y \right) / \equiv,$$

onde \equiv é a relação de equivalência gerada pelas identificações

$$(\tau \circ (\rho, \tau_n, \varsigma), x'_q, x_{\underline{k}_1}^1, \dots, x_{\underline{k}_n}^n, x_p, y) \equiv (\tau, \mu(\tau_1, x_{\underline{k}_1}^1), \dots, \mu(\tau_n, x_{\underline{k}_n}^n), \nu(\varsigma, x_p, y)),$$

para quaisquer $n \geq 0$, $p, q \geq 1$, $\tau \in \mathbb{K}_n$, $\tau_i \in \mathbb{K}_{k_i}$, $\rho \in \mathbb{K}_q$, $\varsigma \in \mathbb{K}_p$ e quaisquer elementos em X e Y .

O próximo conceito necessário é o de espaço de laços de Moore.

Definição 3.6.7. *Seja \mathbb{R}^+ o conjunto dos números reais não negativos equipado com sua topologia usual e seja $A = (A, a)$ um espaço topológico pontuado. O espaço de laços de Moore de A é denotado por $\Omega_M(A)$ e definido por*

$$\Omega_M(A) := \{(\gamma, t) \in A^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}^+; \gamma(0) = a \text{ e } \gamma(s) = a \forall s \geq t\}.$$

Definição 3.6.8. *Seja $(A, B) = (A, B, b)$ um par de espaços topológicos pontuados, isto é, $B \subseteq A$ e b é o ponto base de A e de B . O espaço de laços relativos de Moore de (A, B) é denotado por $\Omega_M(A, B)$ e definido por*

$$\Omega_M(A, B) := \{(\gamma, t) \in A^{\mathbb{R}^+} \times \mathbb{R}^+; \gamma(0) = b, \gamma(t) \in B \text{ e } \gamma(s) = \gamma(t) \forall s \geq t\}.$$

Observação 3.6.9. *Para quaisquer pares de espaços topológicos pontuados $(A, B) = (A, B, b)$, as afirmações abaixo são bem conhecidas na literatura.*

(a) *Existe uma estrutura natural de monoide topológico em $\Omega_M(A)$ que define uma ação topológica (à esquerda) $(\Omega_M(A), \Omega_M(A, B))$;*

(b) *O espaço de laços usual (de Poincaré) $\Omega(A)$ é um retrato por deformação de $\Omega_M(A)$. O mesmo vale para o espaço de laços relativos usual e o de Moore.*

Desde que nós trabalharemos apenas com espaços de laços de Moore, nós omitiremos o subscrito M da notação Ω_M .

Lembremos que o cone (não reduzido) de um espaço topológico A , denotado por CA , é o espaço quociente

$$\frac{A \times [0, 1]}{A \times \{0\}}.$$

Um elemento típico de CA é denotado por $[a, t]$.

A retificação \mathcal{HLS} faz uso de cones e então a seguinte observação, cuja verificação é por inspeção direta, é importante.

Observação 3.6.10. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ com aplicações de estrutura μ e ν . Então $(X, CY) \in \text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ com aplicações de estrutura μ' e ν' , onde $\mu' := \mu$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ e $(\tau, x_n, [y, t]) \in \mathbb{K}_{n+1} \times X^n \times CY$,*

$$\nu'(\tau, x_n, [y, t]) := [\nu(\tau, x_n, y), t].$$

Estamos em condição de definir a retificação \mathcal{HLS} .

Definição 3.6.11. *A construção de espaços de órbitas de uma A_∞ -ação junto com os funtores espaços de laços e espaços relativos de Moore define um funtor*

$$\mathcal{HLS} : \text{Alg}(\text{Act}_\infty) \rightarrow \text{Alg}(\text{Act})$$

$$(X, Y) \mapsto (\Omega(CY // X), \Omega(CY // X, Y // X)),$$

chamado de retificação \mathcal{HLS} .

Agora nós descreveremos as aplicações necessárias para enunciar o teorema de reconhecimento de espaços de laços relativos de [26].

Por conveniência nós identificamos Y com $Y \times \{1\}$ em CY e também denotamos por $*$ a classe dos elementos de $Y \times \{0\}$ em CY . Com estas convenções, definimos $[\delta_2, *]$ como o ponto base de $\{*\} // X$ e de $CY // X$ abaixo.

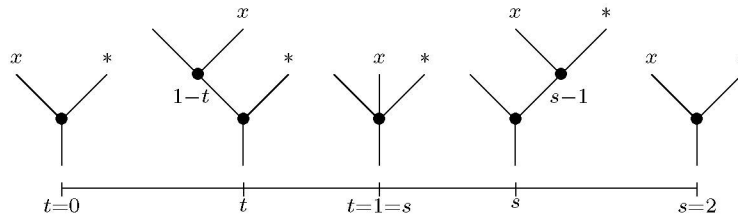
No que segue observemos que se $(X, Y) \in \text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ então $(X, \{*\}) \in \text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ com aplicações de estrutura óbvias.

Definição 3.6.12. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\text{Act}_\infty)$. Definimos*

$$\gamma : X \rightarrow \Omega(\{*\} // X)$$

$$x \mapsto (\gamma_x, 2),$$

onde $\gamma_x(t) := [\delta_2 \circ_1^{1-t} \delta_2, x, *]$ para $0 \leq t \leq 1$ e $\gamma_x(s) := [\delta_2 \circ_2^{s-1} \delta_2, x, *]$ para $1 \leq s \leq 2$.

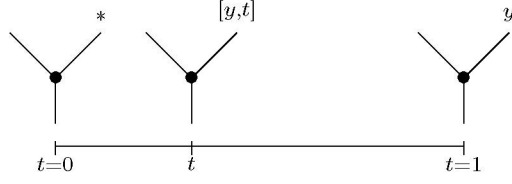


e

$$\lambda : Y \rightarrow \Omega(CY // X, Y // X)$$

$$y \mapsto (\lambda_y, 1),$$

onde $\lambda_y(t) := [\delta_2, [y, t]]$ para $0 \leq t \leq 1$.



Finalmente, considere o mergulho topológico

$$i : \{*\} // X \rightarrow CY // X$$

$$[\tau, x_n, *] \mapsto [\tau, x_n, *].$$

Desde que $\{*\} // X$ é um retrato por deformação forte de $CY // X$, segue que

$$\Omega i : \Omega(\{*\} // X) \rightarrow \Omega(CY // X)$$

é uma equivalência homotópica.

Precisamos de uma última definição para finalizar a discussão sobre a retificação \mathcal{HLS} .

Definição 3.6.13. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ com aplicações de estrutura μ e ν e seja $\pi_0(X)$ o conjunto de componentes caminho de X . Considere a multiplicação M induzida por μ em X . Então M induz uma multiplicação M' em $\pi_0(X)$. Dizemos que (X, Y) é grouplike se $\pi_0(X)$ é um grupo com respeito a M' .*

Notemos que para que uma A_∞ -ação (X, Y) seja grouplike é suficiente que X seja conexo, e então este requerimento é pouco restritivo.

Finalmente enunciamos o teorema de reconhecimento de espaços de laços relativos de [26]. Entre outras coisas este teorema diz se que existe uma A_∞ -ação (com unidade estrita) (X, Y) então Y é, a menos de uma equivalência homotópica fraca, um espaço de laços relativos.

Teorema 3.6.14 (Reconhecimento de espaços de laços relativos). *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ grouplike. Então*

$$((\Omega i)\gamma, \lambda) : (X, Y) \rightarrow (\Omega(CY // X), \Omega(CY // X, Y // X))$$

é uma equivalência homotópica fraca A_∞ -equivariante.

Demonstração. Veja Teorema 2.18 em [26]. □

Corolário 3.6.15. *Retificações \mathcal{HLS} de A_∞ -ações grouplike são retificações boas.*

Agora nós podemos começar a aplicar o relacionamento entre A_∞ -ações e h-ações através de um morfismo de operadas $\xi : \mathbb{W}\text{Act} \rightarrow \text{Act}_\infty$ cuja existência foi provada na primeira seção. No final do Apêndice B nós damos uma construção explícita de ξ , por enquanto convencionemos que um tal morfismo esteja fixado. No que segue lembremos que o funtor ξ^* preserva objetos.

Corolário 3.6.16. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ grouplike. Então existe uma equivalência homotópica fraca*

$$\xi^*(X, Y) \xrightarrow{\sim} (\Omega(CY // X), \Omega(CY // X, Y // X))$$

que é um morfismo A_∞ -equivariante em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$.

Demonstração. Segue da proposição 3.6.5 e do teorema anterior. \square

3.7 Comparando \mathcal{BM} e \mathcal{BV} com \mathcal{HLS}

Nesta seção iremos comparar as retificações \mathcal{BM} e \mathcal{BV} com \mathcal{HLS} . Provaremos que sob certas hipóteses as retificações \mathcal{BM} e \mathcal{BV} se relacionam com a retificação \mathcal{HLS} através de zig-zags de equivalências homotópicas fracas A_∞ -equivariantes. Esse relacionamento é razoável desde que de certa forma uma equivalência homotópica fraca A_∞ -equivariante é próxima de uma equivalência fraca em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Desde que a retificação \mathcal{HLS} é dada para A_∞ -ações, nós usaremos o funtor restrição $\xi^* : \text{Alg}(\text{Act}_\infty) \rightarrow \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ como auxiliar nas comparações.

Precisamos antes de alguns lemas relacionando morfismos de álgebras a morfismos A_∞ -equivariantes. Notemos que, mesmo que tais lemas não sejam imediatos, as afirmações são completamente intuitivas desde que um morfismo A_∞ -equivariante é definido para ser um morfismo de álgebras a menos de homotopia.

Lema 3.7.1. *Seja*

$$(f', g') : (X', Y') \rightarrow (A', B')$$

um morfismo A_∞ -equivariante. Então para quaisquer

$$(f, g) : (X, Y) \rightarrow (X', Y') \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$$

e

$$(r, s) : (A', B') \rightarrow (A, B) \in \text{Alg}(\text{Act})$$

nós temos que

$$(r, s)(f', g')(f, g) : (X, Y) \rightarrow (A, B)$$

é um morfismo A_∞ -equivariante.

Demonstração. Sejam μ e ν (respectivamente μ' e ν') as aplicações de estrutura de (X, Y) (respectivamente (X', Y')) e seja e (respectivamente e') a unidade de A (respectivamente A'). A multiplicação e a ação em (A, B) ou (A', B') serão denotadas por juxtaposição. Sejam

$$F' : \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_{n+1} \times X'^n \rightarrow A' \text{ e } G' : \coprod_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_{m+2} \times X'^m \times Y' \rightarrow B'$$

aplicações satisfazendo a definição de A_∞ -equivariância para (f', g') .

Definamos

$$F := rF' \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} 1 \times f^n \right) : \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_{n+1} \times X^n \rightarrow A$$

e

$$G := sG' \left(\bigoplus_{m \in \mathbb{N}} 1 \times f^m \times g \right) : \prod_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_{m+2} \times X^m \times Y \rightarrow B.$$

Segue que para quaisquer elementos no domínio de G :

$$\begin{aligned} (a) \quad & F(\delta_1) = rF'(\delta_1) = r(e') = e; \\ (b) \quad & G(\delta_2, y) = sG'(\delta_2, g(y)) = sg'g(y); \\ (c) \quad & G(\tau \circ (\rho, \tau_{\underline{m}}, \varsigma), x_{\underline{q}}, x_{\underline{k_1}}^1, \dots, x_{\underline{k_m}}^m, x_{\underline{p}}', y) = \\ &= sG'(\tau \circ (\rho, \tau_{\underline{m}}, \varsigma), f(x_{\underline{q}}), f(x_{\underline{k_1}}^1), \dots, f(x_{\underline{k_m}}^m), f(x_{\underline{p}}'), g(y)) = \\ &= s(F'(\rho, f(x_{\underline{q}}))G'(\tau, \mu'(\tau_1, f(x_{\underline{k_1}}^1)), \dots, \mu'(\tau_m, f(x_{\underline{k_m}}^m)), \nu'(\varsigma, f(x_{\underline{p}}'), g(y)))) = \\ &= r(F'(\rho, f(x_{\underline{q}}))s(G'(\tau, \mu'(\tau_1, f(x_{\underline{k_1}}^1)), \dots, \mu'(\tau_m, f(x_{\underline{k_m}}^m)), \nu'(\varsigma, f(x_{\underline{p}}'), g(y)))) = \\ &= F(\rho, x_{\underline{q}})s(G'(\tau, f\mu(\tau_1, x_{\underline{k_1}}^1), \dots, f\mu(\tau_m, x_{\underline{k_m}}^m), g\nu(\varsigma, x_{\underline{p}}', y))) = \\ &= F(\rho, x_{\underline{q}})G(\tau, \mu(\tau_1, x_{\underline{k_1}}^1), \dots, \mu(\tau_m, x_{\underline{k_m}}^m), \nu(\varsigma, x_{\underline{p}}', y)). \end{aligned}$$

As condições restantes sobre F são provadas similarmente. Por isso $(r, s)(f', g')(f, g)$ é um morfismo A_∞ -equivariante com respeito a (F, G) . \square

Corolário 3.7.2. *Seja*

$$(f', g') : (X', Y') \rightarrow (A', B')$$

um morfismo A_∞ -equivariante. Então:

(a) *para qualquer*

$$(f, g) : (X, Y) \rightarrow (X', Y') \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}),$$

nós temos que $(f', g')(f, g)$ é um morfismo A_∞ -equivariante;

(b) *para qualquer*

$$(r, s) : (A', B') \rightarrow (A, B) \in \text{Alg}(\text{Act}),$$

nós temos que $(r, s)(f', g')$ é um morfismo A_∞ -equivariante.

Corolário 3.7.3. *Seja $(A, B) \in \text{Alg}(\text{Act})$. Então:*

(a) *a identidade $1 : \varphi^*(A, B) \rightarrow (A, B)$ é um morfismo A_∞ -equivariante;*

(b) *para qualquer*

$$(f, g) : (X, Y) \rightarrow \varphi^*(A, B) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}),$$

nós temos que

$$(f, g) : (X, Y) \rightarrow (A, B)$$

é um morfismo A_∞ -equivariante.

Demonstração.

(a) basta construir aplicações F e G usando multiplicações iteradas junto com a ação de (A, B) (para qualquer árvore). Os detalhes são rotineiros;

(b) segue de (a) e do corolário anterior. \square

Os próximos dois resultados nos trazem comparações das retificações \mathcal{BM} e \mathcal{HLS} e das retificações \mathcal{BV} e \mathcal{HLS} . Lembremos que zig-zags de equivalências fracas em categorias modelo induzem isomorfismos em suas categoria homotópicas, e portanto as comparações abaixo são relevantes desde que equivalências homotópicas fracas A_∞ -equivariantes são equivalências fracas na categoria modelo $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ a menos de homotopia.

A partir de agora omitiremos os funtores φ^* e ξ^* dos enunciados dos resultados que seguirão para maior simplicidade e clareza dos mesmos (e porque tais funtores preservam objetos), contudo o contexto deve deixar claro quando eles estão sendo considerados.

Teorema 3.7.4. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ grouplike tal que $\xi^*(X, Y)$ é cofibrante em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Então existe um zig-zag de equivalências homotópicas fracas A_∞ -equivariantes*

$$\varphi_!(X, Y) \xleftarrow{\sim} (X, Y) \xrightarrow{\sim} (\Omega(CY // X), \Omega(CY // X, Y // X))$$

em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$.

Demonstração. Desde que (X, Y) é grouplike, então segue do corolário 3.6.16 que existe uma equivalência homotópica fraca

$$\xi^*(X, Y) \rightarrow (\Omega(CY // X), \Omega(CY // X, Y // X))$$

A_∞ -equivariante em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Desde que $\xi^*(X, Y)$ é cofibrante em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$, a unidade da adjunção

$$\eta_{\xi^*(X, Y)} : \xi^*(X, Y) \rightarrow \varphi^* \varphi_! \xi^*(X, Y)$$

é uma equivalência fraca em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ e

$$\eta_{\xi^*(X, Y)} : \xi^*(X, Y) \rightarrow \varphi_! \xi^*(X, Y)$$

é um morfismo A_∞ -equivariante pelos corolários 3.3.24 e 3.7.3. O resultado segue omitindo-se ξ^* . \square

Teorema 3.7.5. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ grouplike tal que $\xi^*(X, Y)$ é cofibrante em*

$\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Então existe um zig-zag de equivalências homotópicas fracas

$$\begin{array}{c}
 \Phi(X, Y) \\
 \downarrow \sim \\
 \varphi_!(X, Y) \\
 \uparrow \sim \\
 (X, Y) \\
 \downarrow \sim \\
 (\Omega(CY // X), \Omega(CY // X, Y // X))
 \end{array}$$

A_∞ -equivariantes em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$.

Demonstração. Pelo teorema anterior, nós só precisamos mostrar que existe uma equivalência homotópica fraca A_∞ -equivariante

$$\varphi^* \Phi(X, Y) \rightarrow \varphi_!(X, Y).$$

De fato, considere

$$\theta_{\xi^*(X, Y)} : \Phi \xi^*(X, Y) \rightarrow \varphi_! \xi^*(X, Y) \in \text{Alg}(\text{Act}).$$

Desde que $\xi^*(X, Y)$ é cofibrante em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$, então $\theta_{\xi^*(X, Y)}$ é uma equivalência homotópica fraca pelo teorema 3.5.2 e desde que $\theta_{\xi^*(X, Y)} \in \text{Alg}(\text{Act})$ nós temos que

$$\theta_{\xi^*(X, Y)} : \varphi^* \Phi \xi^*(X, Y) \rightarrow \varphi^* \varphi_! \xi^*(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$$

e então

$$\theta_{\xi^*(X, Y)} : \varphi^* \Phi \xi^*(X, Y) \rightarrow \varphi_! \xi^*(X, Y)$$

é A_∞ -equivariante pelo corolário 3.7.3. O resultado segue omitindo-se ξ^* e φ^* . \square

Como já observamos, uma condição suficiente para $(X, Y) \in \text{Alg}(\text{Act}_\infty)$ ser grouplike é que X seja conexo.

3.8 h-ações e espaços de laços relativos

Nesta seção nós damos duas extensões parciais, para h-ações, do teorema de reconhecimento de espaços de laços relativos de [26].

É importante observar que a prova do principal resultado em [26], Teorema 2.12, que implica o teorema de reconhecimento, faz uso explícito da unidade estrita de A_∞ -ações e não parece ser possível adaptar a prova para h-ações, mesmo que se possa reproduzir espaços de órbitas para as referidas. Outro fato que chamamos atenção é que mesmo que usemos o resultado de [26] para extendê-lo para h-ações, nós precisamos apenas que tal resultado seja válido para ações topológicas e nesse caso as demonstrações e construções em [26] poderiam ser simplificadas.

Para a primeira extensão precisamos do seguinte lema.

Lema 3.8.1. $\varphi^* = \xi^* \psi^*$.

$$\begin{array}{ccccc} & & \varphi^* & & \\ & \searrow & & \swarrow & \\ \text{Alg}(\text{Act}) & \xrightarrow{\psi^*} & \text{Alg}(\text{Act}_\infty) & \xrightarrow{\xi^*} & \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}) \end{array}$$

Demonstração. Segue por inspeção direta. \square

No que segue nós usamos a retificação \mathcal{BM} para estender, para h-ações cofibrantes, o resultado de reconhecimento de espaços de laços relativos de [26].

Teorema 3.8.2. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ e escrevamos $\varphi_!(X, Y) = (\hat{X}, \hat{Y})$. Suponha que $\psi^*(\hat{X}, \hat{Y})$ é grouplike e que (X, Y) é cofibrante em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Então existe uma equivalência homotópica fraca*

$$(X, Y) \xrightarrow{\sim} (\Omega(C\hat{Y} // \hat{X}), \Omega(C\hat{Y} // \hat{X}, \hat{Y} // \hat{X})) ,$$

A_∞ -equivariante em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$.

Demonstração. Desde que $\psi^*(\hat{X}, \hat{Y})$ é grouplike, segue do corolário 3.6.16 que existe uma equivalência homotópica fraca

$$\xi^* \psi^*(\hat{X}, \hat{Y}) \rightarrow (\Omega(C\hat{Y} // \hat{X}), \Omega(C\hat{Y} // \hat{X}, \hat{Y} // \hat{X}))$$

A_∞ -equivariante em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Além disso, desde que (X, Y) é cofibrante em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$, a unidade da adjunção

$$\eta_{(X, Y)} : (X, Y) \rightarrow \varphi^*(\hat{X}, \hat{Y})$$

é uma equivalência fraca em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ pelo corolário 3.3.24. O resultado segue dos lemas 3.8.1 e 3.7.2 (a). \square

Agora usamos a retificação \mathcal{BM} para dar uma segunda extensão (parcial) do teorema de reconhecimento de espaços de laço relativos de [26]. Neste caso não precisamos de hipótese de cofibrância, contudo não asseguramos que a equivalência homotópica fraca abaixo é um morfismo A_∞ -equivariante.

Teorema 3.8.3. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ e escrevamos $\Phi(X, Y) = (\tilde{X}, \tilde{Y})$. Suponha que $\psi^*(\tilde{X}, \tilde{Y})$ é grouplike. Então existe uma equivalência homotópica fraca*

$$(X, Y) \xrightarrow{\sim} (\Omega(C\tilde{Y} // \tilde{X}), \Omega(C\tilde{Y} // \tilde{X}, \tilde{Y} // \tilde{X})) .$$

Demonstração. Desde que $\psi^*(\tilde{X}, \tilde{Y})$ é grouplike, segue do corolário 3.6.16 que em particular existe uma equivalência homotópica fraca

$$(\tilde{X}, \tilde{Y}) \rightarrow (\Omega(C\tilde{Y} // \tilde{X}), \Omega(C\tilde{Y} // \tilde{X}, \tilde{Y} // \tilde{X})) .$$

Além disso o mergulho topológico

$$\iota : (X, Y) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{Y})$$

é uma equivalência homotópica pelo teorema 3.4.22. \square

A observação abaixo tem por finalidade mostrar que o requerimento da hipótese grouplike nos dois teoremas anteriores é pouco restritivo.

Observação 3.8.4. *Seja $(X, Y) \in \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$. Então:*

(a) *Se (X, Y) é cofibrante em $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$, então existe uma equivalência homotópica fraca $X \rightarrow \hat{X}$ e então uma condição suficiente para $\psi^*(\hat{X}, \hat{Y})$ ser grouplike é que X seja conexo;*

(b) *Desde que existe uma equivalência homotópica fraca $X \rightarrow \tilde{X}$, uma condição suficiente para $\psi^*(\tilde{X}, \tilde{Y})$ ser grouplike é que X seja conexo.*

O corolário abaixo (e o caso particular que o segue) finaliza nosso trabalho com uma aplicação, ao menos teórica, do teorema acima, pois desde que grupos de homotopia e (co)homologia singular de espaços de laços possuem diversos métodos particulares para suas determinações, saber quando um espaço é fracamente homotopicamente equivalente a um espaços de laços é importante. Por exemplo em [1] a homologia de espaços de laços simplesmente conexos é calculada via homologia de construção cobar.

A mesma discussão vale com respeito a espaços de laços relativos, pois, por exemplo, segue como um caso particular do trabalho de Felix, Halperin e Thomas (cf. [17]) que sob certas hipóteses a homologia de um espaço de laços relativos pode ser calculada como a homologia de uma construção cobar relativa.

O resultado abaixo com respeito a X e espaços de laços já é consequência dos trabalhos [8] e [55], foquemos então no caso de espaços de laços relativos.

Corolário 3.8.5. *Seja Y um espaço e suponha que existe uma h -ação (X, Y) tal que X é conexo. Então os grupos de homotopia ((co)homologia singular) de Y são isomorfos aos grupos de homotopia ((co)homologia singular) de um espaço de laços relativos.*

Corolário 3.8.6. *Seja Y um espaço e suponha que existe um monoide topológico conexo agindo em Y . Então os grupos de homotopia ((co)homologia singular) de Y são isomorfos aos grupos de homotopia ((co)homologia singular) de um espaço de laços relativos.*

Apêndice A

Categorias

Neste apêndice reunimos algumas definições e resultados da teoria de categorias com intuito único de estabelecer notação e terminologia. As próximas seções tratam de categorias, funtores, transformações naturais, (co)produtos, pushouts, pullbacks, coqualizadores reflexivos, (co)limites, equivalências e adjunções de categorias, categorias monoidais, entre outros. As referências usadas neste apêndice são [9, 10, 35].

A.1 Categorias, funtores e transformações naturais

Definição A.1.1. *Uma categoria \mathcal{C} consiste do seguinte:*

- (C1) *uma classe $|\mathcal{C}|$ cujos membros são chamados de objetos (de \mathcal{C});*
- (C2) *para cada par (A, B) de objetos está associado um único conjunto denotado por $\mathcal{C}(A, B)$;*
- (C3) *para quaisquer pares de objetos $(A, B) \neq (X, Y)$, os conjuntos $\mathcal{C}(A, B)$ e $\mathcal{C}(X, Y)$ são disjuntos;*
- (C4) *para cada objeto A está associado um elemento $1_A \in \mathcal{C}(A, A)$ chamado de identidade de A ;*
- (C5) *para cada terno (A, B, C) de objetos está associada uma aplicação*

$$\begin{aligned}\circ_{A,B,C} : \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) &\rightarrow \mathcal{C}(A, C) \\ (f, g) &\mapsto \circ_{A,B,C}(f, g) := g \circ f;\end{aligned}$$

de modo que:

- (C6) *para qualquer $f \in \mathcal{C}(A, B)$:*

$$f \circ 1_A = f \text{ e } 1_B \circ f = f;$$

- (C7) *para quaisquer $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$ e $h \in \mathcal{C}(C, D)$:*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

A classe

$$\bigcup_{A, B \in |\mathcal{C}|} \mathcal{C}(A, B)$$

é denotada por $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ e seus membros são chamados de flechas ou morfismos (de \mathcal{C}). Se $f \in \mathcal{C}(A, B)$ dizemos que A é a fonte (ou domínio) de f e que B é o alvo (ou codomínio) de f e escrevemos

$$f : A \rightarrow B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B .$$

As aplicações do tipo $\circ_{A, B, C}$ são genericamente chamadas de composições e $g \circ f$ é chamada a composta de f e g . Sempre que não houver possibilidade de confusão escreveremos tal composta apenas por justaposição: gf . Do mesmo modo, a identidade 1_A de um objeto A será denotada apenas por 1 quando conveniente.

Definição A.1.2. *Seja \mathcal{C} uma categoria. Uma subcategoria \mathcal{D} de $|\mathcal{C}|$ consiste do seguinte: uma classe $|\mathcal{D}| \subseteq \mathcal{C}$ e para cada par (A, B) em $|\mathcal{D}|$ um conjunto $\mathcal{D}(A, B) \subseteq \mathcal{C}(A, B)$ de modo que para qualquer $A \in |\mathcal{D}|$ têm-se que $1_A \in \mathcal{D}(A, A)$ e para quaisquer $f \in \mathcal{D}(A, B), g \in \mathcal{D}(B, C)$ têm-se que $gf \in \mathcal{D}(A, C)$.*

Observação A.1.3. *O conjunto vazio é uma categoria. Qualquer classe pode ser considerada uma categoria: seus membros são seus objetos e as únicas flechas são as identidades; uma categoria deste tipo é chamada de discreta.*

Observação A.1.4. *Uma classe pré-ordenada é uma classe X com uma relação binária \leq reflexiva e transitiva. Toda classe pré-ordenada pode ser considerada uma categoria: seus membros são seus objetos e definimos uma única flecha $f_{AB} : A \rightarrow B$ se, e somente se, $A \leq B$.*

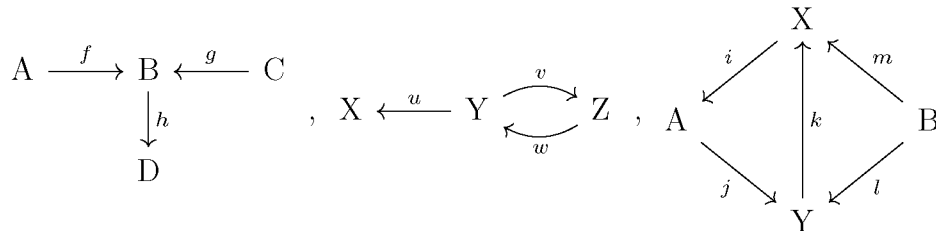
Observação A.1.5. *Um monoide (grande) é uma classe X munida de uma operação $m : X \times X \rightarrow X$ associativa com unidade. Todo monoide é uma categoria com um só objeto e seus membros como suas flechas. A composição é dada pela operação do monoide.*

No que segue damos alguns exemplos de categorias a fim de fixar notação. Descreveremos apenas os objetos e admitiremos conhecidos os morfismos em cada caso. No caso da categoria simplicial (dos topólogos) \blacktriangle os morfismos são as aplicações monótonas. Daremos a notação da categoria e a descrição dos seus objetos. Alguns conceitos envolvidos são definidos adiante. No que R é um anel (associativo) comutativo com unidade.

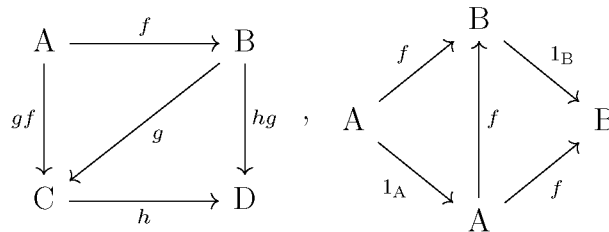
- (a) Set: conjuntos;
- (b) Top: espaços topológicos;
- (c) top: espaços topológicos compactamente gerados;
- (d) \blacktriangle : $\{[n] := \{0, 1, \dots, n\}; n \geq 0\}$;
- (e) sSet: conjuntos simpliciais: $= \text{Set}^{\blacktriangle^{op}}$;

- (f) Cat: categorias pequenas;
- (g) Grpd: grupoides pequenos;
- (h) Mod_R : R-módulos;
- (i) GMod_R : R-módulos (\mathbb{Z} -)graduados;
- (j) Ch_R : R-complexos de cadeias;
- (k) Ch_R^+ : R-complexos de cadeias limitados inferiormente;
- (l) cCh_R : R-complexos de cocadeias;
- (m) cCh_R^+ : R-complexos de cocadeias limitados inferiormente;
- (n) Grp: grupos;
- (o) Ab: grupos abelianos.

Não daremos uma definição rigorosa de diagramas e diagramas comutativos em uma categoria \mathcal{C} . Por um diagrama em \mathcal{C} entenderemos qualquer representação gráfica de flechas nesta categoria. Eventualmente nos referimos a um diagrama de acordo com seu formado: um triângulo, um quadrado, etc.



Diremos que um diagrama em \mathcal{C} é comutativo ou que ele comuta se a composição de quaisquer duas seqüências de flechas componíveis entre dois objetos dados do diagrama é igual.



No que segue, \mathcal{C} sempre denotará uma categoria. Abaixo daremos alguns exemplos de categorias construídas a partir de outras. As flechas identidades e as composições em todos os casos são definidas de modo natural.

Definição A.1.6. A categoria dual ou oposta de \mathcal{C} é denotada por \mathcal{C}^{op} e definida como segue: $|\mathcal{C}^{op}| := |\mathcal{C}|$ e para cada par de objetos A e B em \mathcal{C}^{op} definimos $\mathcal{C}^{op}(A, B) := \mathcal{C}(B, A)$. Escrevemos $f^{op} : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{C}^{op}}$ para significar que f^{op} corresponde a flecha $f : B \rightarrow A \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$.

Definição A.1.7. Seja I um conjunto não vazio e para cada $i \in I$ seja \mathcal{C}_i uma categoria. A categoria produto da família $(\mathcal{C}_i)_I$, denotada por $\prod_I \mathcal{C}_i$, é definida como segue: $|\prod_I \mathcal{C}_i| := \prod_I |\mathcal{C}_i|$ e para quaisquer $(A_i)_I, (B_i)_I \in \prod_I |\mathcal{C}_i|$, $(\prod_I \mathcal{C}_i)((A_i)_I, (B_i)_I) := \prod_I \mathcal{C}_i(A_i, B_i)$. Se $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}$ para todo $i \in I$, escrevemos $\prod_I \mathcal{C}_i = \mathcal{C}^I$. Se $I = \{1, 2, \dots, n\}$, escrevemos $\prod_I \mathcal{C}_i = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \dots \times \mathcal{C}_n$. A categoria união disjunta (coproduto) de $(\mathcal{C}_i)_I$, denotada por $\coprod_I \mathcal{C}_i$, é definida similarmente, via união disjunta de classes.

Definição A.1.8. Fixemos um objeto A em \mathcal{C} . A categoria sob A é denotada por $(A \downarrow \mathcal{C})$ e definida como segue: os objetos de $(A \downarrow \mathcal{C})$ são todas as flechas em \mathcal{C} com fonte A . Se $f : A \rightarrow X$ e $g : A \rightarrow Y$ são objetos de $(A \downarrow \mathcal{C})$, então uma flecha $\alpha : f \rightarrow g$ em $(A \downarrow \mathcal{C})$ é, por definição, uma flecha $\alpha : X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} tal que $\alpha f = g$.

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ X & \xrightarrow{\alpha} & Y \end{array}$$

A categoria sobre A é denotada por $(\mathcal{C} \downarrow A)$ é definida de modo análogo: os objetos de $(\mathcal{C} \downarrow A)$ são todas as flechas em \mathcal{C} com alvo A .

Definição A.1.9. A categoria de flechas de \mathcal{C} é denotada por $Arr(\mathcal{C})$ e definida com segue: $|Arr(\mathcal{C})| := \overrightarrow{\mathcal{C}}$ e para quaisquer $f : A \rightarrow B, g : C \rightarrow D \in |Arr(\mathcal{C})|$, uma flecha em $Arr(\mathcal{C})$ entre f e g é um par $(u : A \rightarrow C, v : B \rightarrow D)$ de flechas em \mathcal{C} tal que o quadrado abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & C \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ B & \xrightarrow{v} & D \end{array}$$

Definição A.1.10. Seja $f : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$. Dizemos que f é um:

- (a) *monomorfismo* se para quaisquer $a, b : X \rightarrow A \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$ tais que $fa = fb$, têm-se que $a = b$;
- (b) *epimorfismo* se para quaisquer $c, d : B \rightarrow C \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$ tais que $cf = df$, têm-se que $c = d$;
- (c) *bimorfismo* se for um monomorfismo e um epimorfismo;
- (d) *isomorfismo* se existir $g : B \rightarrow A \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$ tal que $gf = 1_A$ e $fg = 1_B$.

Seja $(u, v) : f \rightarrow g \in \text{Arr}(\mathcal{C})$; então (u, v) é um isomorfismo em $\text{Arr}(\mathcal{C})$ se, e somente se, u e v são isomorfismos em \mathcal{C} . Uma categoria em que toda flecha é um isomorfismo é chamada de um grupoide. Se $A, B \in \mathcal{C}$, dizemos que A é isomorfo a B se existir um isomorfismo $f : A \rightarrow B$.

Definição A.1.11. *Sejam $r : X \rightarrow A, s : B \rightarrow Y \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$. Dizemos que:*

- (a) *r é uma retração se existir $i : A \rightarrow X \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$ tal que $ri = 1_A$;*
- (b) *s é uma seção se existir $p : Y \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$ tal que $ps = 1_B$;*
- (c) *A é um retrato de X se existir uma retração $r : X \rightarrow A$.*

No que segue definimos conceitos fundacionais em teoria de categorias. É importante ressaltar que o termo conjunto significa uma classe não própria.

Definição A.1.12. *Dizemos que uma categoria \mathcal{C} é:*

- (a) *pequena se $|\mathcal{C}|$;*
- (b) *finita se $|\mathcal{C}|$ é um conjunto finito.*

Observação A.1.13. *Alguns autores permitem por definição que as classes da forma $\mathcal{C}(A, B)$ sejam próprias e o que definimos aqui como categorias é as vezes chamado de categorias localmente pequenas.*

De agora em diante, $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ e \mathcal{J} sempre denotarão categorias.

As ferramentas adequadas para estudar o relacionamento entre categorias são os funtores. Do mesmo modo, funtores podem ser estudados via transformações naturais. Seguem as definições.

Definição A.1.14. *Um funtor F entre \mathcal{C} e \mathcal{D} , também escrito $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, consiste do seguinte:*

- (a) *uma aplicação $|F| : |\mathcal{C}| \rightarrow |\mathcal{D}|, A \mapsto FA$;*
- (b) *uma aplicação $F_{A,B} : \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{D}(FA, FB), f \mapsto Ff$, para cada par (A, B) de objetos em \mathcal{C} ;*

de modo que:

- (c) $F1_A = 1_{FA}$ *para qualquer $A \in \mathcal{C}$;*
- (d) $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$ *para quaisquer $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$.*

Definição A.1.15. *Sejam $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$. O funtor composto $G \circ F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ é definido por $|G \circ F| := |G| \circ |F|$ e $(G \circ F)_{A,B} := G_{FA,FB} \circ F_{A,B}$, para quaisquer $A, B \in \mathcal{C}$.*

Definição A.1.16. *Sejam F e G funtores entre \mathcal{C} e \mathcal{D} . Uma transformação natural η entre F e G , também escrita $\eta : F \rightarrow G$, consiste de uma coleção de flechas $\eta_A : FA \rightarrow GA \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$ para cada $A \in \mathcal{C}$ de modo que para qualquer $f : A \rightarrow B \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$ o quadrado abaixo comuta.*

$$\begin{array}{ccc}
FA & \xrightarrow{\eta_A} & GA \\
Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\
FB & \xrightarrow{\eta_B} & GB
\end{array}$$

Escrevemos também $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathcal{C}|}$ ou $\eta = (\eta_A : FA \rightarrow GA)_{A \in |\mathcal{C}|}$.

Para qualquer categoria \mathcal{C} e qualquer funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ temos o funtor identidade $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ e a transformação natural identidade $1_F : F \rightarrow F$ definidos de modo natural.

Definição A.1.17. Dizemos que um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é um isomorfismo de categorias se existir um funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $G \circ F = 1_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G = 1_{\mathcal{D}}$. Dizemos que \mathcal{C} e \mathcal{D} são isomorfas se existir um isomorfismo de categorias $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Definição A.1.18. Sejam $F, G, H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtores e $\eta : F \rightarrow G$, $\theta : G \rightarrow H$ transformações naturais. A transformação natural composta $\theta \circ \eta : F \rightarrow H$ é definida por $(\theta \circ \eta)_A = \theta_A \circ \eta_A$ ($A \in \mathcal{C}$).

Definição A.1.19. Sejam $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funtores. Uma transformação natural $\eta : F \rightarrow G$ é dita uma equivalência natural ou um isomorfismo natural se existir uma transformação natural $\theta : G \rightarrow F$ tal que $\theta \circ \eta = 1_F$ e $\eta \circ \theta = 1_G$. Isto é equivalente a $\eta_A : FA \rightarrow GA$ ser um isomorfismo em \mathcal{D} para cada $A \in \mathcal{C}$. Escrevemos $F \approx G$ para significar que existe um isomorfismo natural entre F e G .

Definição A.1.20. Dizemos que um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma equivalência de categorias se existir um funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $G \circ F \approx 1_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G \approx 1_{\mathcal{D}}$. O par (F, G) também é dito ser uma equivalência de categorias neste caso. Finalmente, dizemos que \mathcal{C} e \mathcal{D} são equivalentes se existir uma equivalência de categorias $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

Definição A.1.21. Seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor. Dizemos que F é:

- (a) *fiel* se para quaisquer $A, B \in \mathcal{C}$, $F_{AB} : \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{D}(FA, FB)$ é injetiva;
- (b) *pleno* se para quaisquer $A, B \in \mathcal{C}$, $F_{AB} : \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{D}(FA, FB)$ é sobrejetiva;
- (c) *denso* se para qualquer $D \in |\mathcal{D}|$, existir $C \in \mathcal{C}$ tal que FC e D são isomorfos.

Teorema A.1.22. $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma equivalência de categorias se, e somente se, F é fiel, pleno e denso.

Definição A.1.23. Se \mathcal{J} é uma categoria pequena, então a categoria de funtores, denotada $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$, tem como objetos os funtores $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ e como flechas as transformações naturais entre eles. Para cada $N \in |\mathcal{C}|$ temos o funtor constante $\Delta_N : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}, X \mapsto N, f \mapsto 1_N$ e o funtor diagonal $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{J}}, N \mapsto \Delta_N, f \mapsto ((\Delta f)_N := f)_{N \in |\mathcal{C}|}$.

Definição A.1.24. Sejam $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G, G' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ funtores e sejam $\eta : F \rightarrow F'$ e $\theta : G \rightarrow G'$ transformações naturais.

O produto de Godement entre η e θ é a transformação natural $\theta \star \eta : G \circ F \rightarrow G' \circ F'$ definida, para cada $A \in \mathcal{C}$, por $(\theta \star \eta)_A := \theta_{F'A} \circ G\eta_A$ (ou, equivalentemente, $(\theta \star \eta)_A := G'\eta_A \circ \theta_{FA}$).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & F & & G & \\
 \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{D} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E} \\
 & \Downarrow \eta & & \Downarrow \theta & \\
 & F' & & G' &
 \end{array}
 & \rightsquigarrow &
 \begin{array}{ccc}
 & GoF & \\
 \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{E} \\
 & \Downarrow \theta \star \eta & \\
 & G' \circ F' &
 \end{array}
 \end{array}$$

Se $F = F'$ e $\eta = 1_F$, então escrevemos $\theta \star 1_F := \theta.F$.

Se $G = G'$ e $\theta = 1_G$, então escrevemos $1_G \star \eta := G.\eta$.

A.2 Coprodutos e produtos

Para as definições que seguem, envolvendo coprodutos e produtos, sejam $A, B \in |\mathcal{C}|$, I um conjunto não vazio, $(A_i)_I$ e $(B_i)_I$ famílias em \mathcal{C} e $(f_i : A_i \rightarrow B)_I$, $(g_i : A \rightarrow B_i)_I$, $(h_i : A_i \rightarrow B_i)_I$ e $(k_i : A_i \rightarrow B_i)_I$ famílias em $\vec{\mathcal{C}}$.

Definição A.2.1. Um coproduto de $(A_i)_I$, se existir, é um par $(C, (\alpha_i)_I)$, onde $C \in |\mathcal{C}|$ e $(\alpha_i : A_i \rightarrow C)_I$ é uma família em $\vec{\mathcal{C}}$, de modo que para qualquer $C' \in |\mathcal{C}|$ e qualquer família $(\alpha'_i : A_i \rightarrow C')_I$ em $\vec{\mathcal{C}}$, existe uma única flecha $u : C \rightarrow C' \in \vec{\mathcal{C}}$ tal que o triângulo abaixo comuta, para qualquer $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc}
 & A_i & \\
 \alpha_i \swarrow & & \searrow \alpha'_i \\
 C & \xrightarrow[\quad u \quad]{\quad \exists! \quad} & C'
 \end{array}$$

Observação A.2.2. Seja $(C, (\alpha_i)_I)$ um coproduto de $(A_i)_I$. Prova-se que C é único a menos de isomorfismo, por isso, ocasionalmente escrevemos $C = \coprod_i A_i$.

Definição A.2.3. Seja $(\coprod_i A_i, (\alpha_i)_I)$ um coproduto de $(A_i)_I$.

A flecha $\coprod_i f_i : \coprod_i A_i \rightarrow B$ é definida pela propriedade universal do coproduto e satisfaz $(\coprod_i f_i) \circ \alpha_j = f_j$ para qualquer $j \in I$.

$$\begin{array}{ccc}
 & A_j & \\
 \alpha_j \downarrow & & \searrow f_j \\
 \coprod_i A_i & \xrightarrow[\quad \coprod_i f_i \quad]{\quad \exists! \quad} & B
 \end{array}$$

Lema A.2.4. Seja $p : B \rightarrow X \in \vec{\mathcal{C}}$. Então $p \circ (\coprod_i f_i) = \coprod_i (p \circ f_i)$.

Definição A.2.5. Sejam $(\coprod_i A_i, (\alpha_i)_I)$ um coproduto de $(A_i)_I$ e $(\coprod_i B_i, (\alpha'_i)_I)$ um coproduto de $(B_i)_I$.

A flecha $\oplus_i h_i : \coprod_i A_i \rightarrow \coprod_i B_i$ é definida por $\oplus_i h_i := \coprod_i (\alpha'_i \circ h_i)$. Logo tal flecha satisfaz $(\oplus_i h_i) \circ \alpha_j = \alpha'_j \circ h_j$ para qualquer $j \in I$.

Lema A.2.6. Consideremos a notação da definição anterior. Seja $(u_i : B_i \rightarrow X)_I$ uma família em $\vec{\mathcal{C}}$. Então $(\coprod_I u_i) \circ (\oplus_I h_i) = \coprod_I (u_i \circ h_i)$.

Se $I = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, então escrevemos

$$(a) \quad (\coprod_I A_i, (\alpha_i)_I) := (A_0 \coprod A_1 \coprod \dots \coprod A_{n-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1});$$

$$(b) \quad \coprod_I f_i := f_0 \coprod f_1 \coprod \dots \coprod f_{n-1};$$

$$(c) \quad \oplus_I h_i := h_0 \oplus h_1 \oplus \dots \oplus h_{n-1}.$$

Em particular, com respeito a $(A \coprod A, \alpha_0, \alpha_1)$, temos a flecha codiagonal de A ,

$$1_A \coprod 1_A : A \coprod A \rightarrow A,$$

que satisfaz $(1_A \coprod 1_A) \circ \alpha_0 = 1_A = (1_A \coprod 1_A) \circ \alpha_1$.

Definição A.2.7. Um produto de $(B_i)_I$, se existir, é um par $(\mathbf{P}, (\pi_i)_I)$, onde $\mathbf{P} \in |\mathcal{C}|$ e $(\pi_i : \mathbf{P} \rightarrow B_i)_I$ é uma família em $\vec{\mathcal{C}}$, de modo que para qualquer $\mathbf{P}' \in |\mathcal{C}|$ e qualquer família $(\pi'_i : \mathbf{P}' \rightarrow B_i)_I$ em $\vec{\mathcal{C}}$, existe uma única flecha $v : \mathbf{P}' \rightarrow \mathbf{P} \in \vec{\mathcal{C}}$ tal que o triângulo abaixo comuta, para qualquer $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}' & \xrightarrow[\exists! v]{\quad} & \mathbf{P} \\ & \searrow \pi'_i \quad \swarrow \pi_i & \\ & B_i & \end{array}$$

Observação A.2.8. Seja $(\mathbf{P}, (\pi_i)_I)$ um produto de $(B_i)_I$. Prova-se que \mathbf{P} é único a menos de isomorfismo, por isso, ocasionalmente escrevemos $\mathbf{P} = \prod_I B_i$.

Definição A.2.9. Seja $(\prod_I B_i, (\pi_i)_I)$ um produto de $(B_i)_I$.

A flecha $\prod_I g_i : A \rightarrow \prod_I B_i$ é definida pela propriedade universal do produto e satisfaz $\pi_j \circ (\prod_I g_i) = g_j$ para qualquer $j \in I$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[\exists!]{\prod_I g_i} & \prod_I B_i \\ & \searrow g_j & \downarrow \pi_j \\ & & B_j \end{array}$$

Lema A.2.10. Seja $i : X \rightarrow A \in \vec{\mathcal{C}}$. Então $(\prod_I g_i) \circ i = \prod_I (g_i \circ i)$.

Definição A.2.11. Sejam $(\prod_I A_i, (\pi_i)_I)$ um produto de $(A_i)_I$ e $(\prod_I B_i, (\pi'_i)_I)$ um produto de $(B_i)_I$.

A flecha $\odot_I k_i : \prod_I A_i \rightarrow \prod_I B_i$ é definida por $\odot_I k_i := \prod_I (k_i \circ \pi_i)$. Logo tal flecha satisfaz $\pi'_j \circ (\odot_I k_i) = k_j \circ \pi_j$ para qualquer $j \in I$.

Lema A.2.12. *Consideremos a notação da definição anterior. Seja $(v_i : X \rightarrow A_i)_I$ uma família em $\vec{\mathcal{C}}$. Então $(\odot_I k_i) \circ (\prod_I v_i) = \prod_I (k_i \circ v_i)$.*

Se $I = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, então escrevemos

$$(a) \quad (\prod_I B_i, (\pi_i)_I) := (B_0 \prod B_1 \prod \dots \prod B_{n-1}, \pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1});$$

$$(b) \quad \prod_I g_i := g_0 \prod g_1 \prod \dots \prod g_{n-1};$$

$$(c) \quad \odot_I k_i := k_0 \odot k_1 \odot \dots \odot k_{n-1}.$$

Em particular, com respeito a $(B \prod B, \pi_0, \pi_1)$, temos a flecha diagonal de B ,

$$1_B \prod 1_B : B \rightarrow B \prod B,$$

que satisfaz $\pi_0 \circ (1_B \prod 1_B) = 1_B = \pi_1 \circ (1_B \prod 1_B)$.

Aplicando a definição de (co)produto a uma família vazia de objetos em \mathcal{C} obtemos:

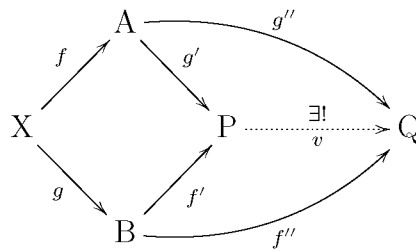
Definição A.2.13. *Sejam $I, T, O \in \mathcal{C}$. Dizemos que:*

- (a) *I é um objeto inicial se para cada $X \in \mathcal{C}$, existe uma única flecha $f : I \rightarrow X$ em \mathcal{C} ;*
- (b) *T é um objeto final (ou terminal) se para cada $X \in \mathcal{C}$, existe uma única flecha $g : X \rightarrow T$ em \mathcal{C} ;*
- (c) *O é um objeto nulo (ou zero) se for tanto um objeto inicial quanto final.*

A.3 Pushouts e pullbacks

Definição A.3.1. *Sejam $f : X \rightarrow A, g : X \rightarrow B \in \vec{\mathcal{C}}$. Um pushout de f e g , se existir, é um terno (P, f', g') , onde $P \in |\mathcal{C}|$ e $f' : B \rightarrow P, g' : A \rightarrow P \in \vec{\mathcal{C}}$, de modo que:*

- (a) $g' \circ f = f' \circ g$;
- (b) *para quaisquer $f'' : B \rightarrow Q, g'' : A \rightarrow Q \in \vec{\mathcal{C}}$ tais que $g'' \circ f = f'' \circ g$, existe uma única flecha $v : P \rightarrow Q \in \vec{\mathcal{C}}$ de modo que $f'' = v \circ f'$ e $g'' = v \circ g'$.*



Definição A.3.2. *Sejam $f : X \rightarrow A, g : X \rightarrow B \in \vec{\mathcal{C}}$. Se (P, f', g') é um pushout de f e g , dizemos que:*

(a) f' é um pushout de f ao longo de g ;

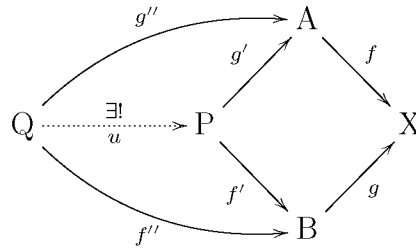
(b) g' é um pushout de g ao longo de f ;

(c) $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & A \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ B & \xrightarrow{f'} & P \end{array}$ é um quadrado pushout.

Definição A.3.3. Sejam $f : A \rightarrow X, g : B \rightarrow X \in \vec{\mathcal{C}}$. Um pullback de f e g , se existir, é um terno (P, f', g') , onde $P \in |\mathcal{C}|$ e $f' : P \rightarrow B, g' : P \rightarrow A \in \vec{\mathcal{C}}$, de modo que:

(a) $f \circ g' = g \circ f'$;

(b) para quaisquer $f'' : Q \rightarrow B, g'' : Q \rightarrow A \in \vec{\mathcal{C}}$ tais que $f \circ g'' = g \circ f''$, existe uma única flecha $u : Q \rightarrow P \in \vec{\mathcal{C}}$ de modo que $f'' = f' \circ u$ e $g'' = g' \circ u$.



Definição A.3.4. Sejam $f : A \rightarrow X, g : B \rightarrow X \in \vec{\mathcal{C}}$. Se (P, f', g') é um pullback de f e g , dizemos que:

(a) f' é um pullback de f ao longo de g ;

(b) g' é um pullback de g ao longo de f ;

(c) $\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g'} & A \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{g} & X \end{array}$ é um quadrado pullback.

A.4 Limites e colimites

Os conceitos definidos anteriormente (objetos inicial e final, (co)produtos, pushouts e pullbacks) são todos casos particulares de limites e colimites de funtores.

Definição A.4.1. Seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor. Um cone de F , se existir, é um par (N, φ) onde $N \in |\mathcal{D}|$ e $\varphi : \Delta_N \rightarrow F$ é uma transformação natural. Isto significa que para qualquer $f : X \rightarrow Y \in \vec{\mathcal{C}}$ o triângulo abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc}
 & N & \\
 \varphi_X \swarrow & & \searrow \varphi_Y \\
 FX & \xrightarrow{Ff} & FY
 \end{array}$$

Definição A.4.2. Seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor. Um limite de F , se existir, é um cone (L, ψ) de F de modo que para cada cone (N, φ) de F dado, existe uma única flecha $u : N \rightarrow L \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$ tal que o triângulo abaixo comuta, para qualquer $X \in \mathcal{C}$.

$$\begin{array}{ccc}
 N & \xrightarrow[\exists! u]{\quad} & L \\
 \varphi_X \searrow & & \swarrow \psi_X \\
 & FX &
 \end{array}$$

Prova-se que um limite (L, ψ) de um funtor F , quando existe, é único em certo sentido, por isso as vezes denotamos por $(\lim F, \psi)$ ou apenas $\lim F$ tal limite.

Definição A.4.3. Seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor. Um cocone de F , se existir, é um par (N, φ) onde $N \in |\mathcal{D}|$ e $\varphi : F \rightarrow \Delta_N$ é uma transformação natural. Isto significa que para qualquer $f : X \rightarrow Y \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$ o triângulo abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc}
 FX & \xrightarrow{Ff} & FY \\
 \varphi_X \searrow & & \swarrow \varphi_Y \\
 & N &
 \end{array}$$

Definição A.4.4. Seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor. Um colimite de F , se existir, é um cocone (L, ψ) de F de modo que para cada cocone (N, φ) de F dado, existe uma única flecha $v : L \rightarrow N \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$ tal que o triângulo abaixo comuta, para qualquer $X \in \mathcal{C}$.

$$\begin{array}{ccc}
 & FX & \\
 \psi_X \swarrow & & \searrow \varphi_X \\
 L & \xrightarrow[\exists! v]{\quad} & N
 \end{array}$$

Prova-se que um colimite (L, ψ) de um funtor F , quando existe, é único em certo sentido, por isso as vezes denotamos por $(\text{colim} F, \psi)$ ou apenas $\text{colim} F$ tal limite.

Definição A.4.5. Um funtor $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ é dito ser pequeno se \mathcal{J} for uma categoria pequena.

Definição A.4.6. Uma categoria \mathcal{C} é dita ser:

- (a) completa se qualquer funtor pequeno $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ tem um limite;
- (b) cocompleta se qualquer funtor pequeno $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ tem um colimite;
- (c) bicompleta se for completa e cocompleta.

A.5 Coequalizadores reflexivos

O conceito de coequalizador reflexivo é usado no capítulo 3 para transferências de estruturas de ações topológicas para espaços quocientes.

Coequalizadores são outros exemplos de colimites de funtores.

Definição A.5.1. *Sejam $f, g : A \rightarrow B \in \vec{\mathcal{C}}$. Dizemos que o par $(E \in |\mathcal{C}|, e : B \rightarrow E \in \vec{\mathcal{C}})$ é um coequalizador de f e g se $fe = ge$ e se para cada $e' : B \rightarrow E' \in \vec{\mathcal{C}}$ dado tal que $fe' = ge'$, existir uma única $a : E \rightarrow E' \in \vec{\mathcal{C}}$ tal que $ae = e'$.*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[f]{g} & B \xrightarrow{e} E \\ & & \searrow e' \downarrow a \\ & & E' \end{array}$$

Definição A.5.2. *Sejam $f, g : A \rightarrow B \in \vec{\mathcal{C}}$ e seja (E, e) um coequalizador de f e g . Dizemos que (E, e) é um coequalizador reflexivo de f e g se existir $s : B \rightarrow A \in \vec{\mathcal{C}}$ tal que $fs = 1_B = gs$.*

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow[s]{f} & B \xrightarrow{e} E \\ A & \xrightarrow[g]{} & \end{array}$$

A.6 Funtores adjuntos

Definição A.6.1. *Seja $A \in |\mathcal{C}|$. O funtor hom (de A) é denotado por $\mathcal{C}(A, -)$ ou $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ e definido como segue.*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(A, -) : \mathcal{C} &\rightarrow \text{Set} \\ B &\mapsto \mathcal{C}(A, B) \\ f : B \rightarrow C &\mapsto f \circ -, \alpha \mapsto f \circ \alpha. \end{aligned}$$

Se $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ são funtores, os funtores $\mathcal{D}(F-, -), \mathcal{C}(-, G-) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$ são definidos de modo natural.

Definição A.6.2. *Sejam $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funtores. Dizemos que (F, G) é um par de funtores adjuntos se existir um isomorfismo natural*

$$\Phi : \mathcal{D}(F-, -) \rightarrow \mathcal{C}(-, G-),$$

e neste caso escrevemos $F \dashv G$ ou $\Phi : F \dashv G$. Dizemos também que:

- (a) (F, G) é uma adjunção entre \mathcal{C} e \mathcal{D} ;
- (b) Φ é uma adjunção entre F e G ;

(b) F é um adjunto à esquerda de G ;

(d) G é um adjunto à direita de F .

Equivalentemente:

Definição A.6.3. *Sejam $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funtores. Dizemos que (F, G) é um par de funtores adjuntos se existirem transformações naturais*

$$\begin{array}{c} \varepsilon : F \circ G \rightarrow 1_{\mathcal{D}} \\ e \\ \eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F \end{array}$$

tais que

$$\begin{array}{c} \varepsilon.F \circ F.\eta = 1_F \\ e \\ G.\varepsilon \circ \eta.G = 1_G \end{array}$$

Neste caso escrevemos $F \dashv G$ ou $(\varepsilon, \eta) : F \dashv G$ e dizemos que:

(a) (F, G) é uma adjunção entre \mathcal{C} e \mathcal{D} ;

(b) (ε, η) é uma adjunção entre F e G ;

(c) ε é a counidade (da adjunção);

(d) η é a unidade (da adjunção);

(e) F é um adjunto à esquerda de G ;

(f) G é um adjunto à direita de F .

Se (F, G) é uma adjunção entre \mathcal{C} e \mathcal{D} também escrevemos $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$. Equivalências de categorias são exemplos de adjunções.

Para a definição abaixo, notemos que se $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ e $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ são funtores e (N, φ) é um cone de F então $(GN, G.\varphi)$ é um cone de $G \circ F$.

Definição A.6.4. *Sejam $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ um funtor fixado e $F : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ um funtor pequeno arbitrário. Dizemos que:*

(a) G preserva limites se para qualquer limite (L, ψ) de F , $(GN, G.\psi)$ é um limite de $G \circ F$;

(b) G reflete limites se para qualquer cone (N, φ) de F tal que $(GN, G.\varphi)$ é um limite de $G \circ F$, têm-se que (N, φ) é um limite de F ;

(c) G levanta limites se para qualquer limite (L', ψ') de $G \circ F$ existir um limite (L, ψ) de F tal que $(GL, G.\psi) = (L', \psi')$;

- (d) G cria limites se para qualquer limite (L', ψ') de $G \circ F$ existir um único limite (L, ψ) de F tal que $(GL, G.\psi) = (L', \psi')$;

Definições similares a acima são dadas para colimites. Um funtor que preserva limites (respectivamente colimites) é também chamado de contínuo (respectivamente cocontínuo).

Proposição A.6.5. *Se (F, G) é um par de funtores adjuntos, então F é cocontínuo e G é contínuo.*

A.7 Categorias monoidais

Nesta seção definimos brevemente categorias monoidais, (objetos) monoides, ações de monoides, módulos sobre monoides e cosmos.

Seja $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ um funtor e escrevamos $\otimes(A, B) := A \otimes B$ e $\otimes(f, g) := f \otimes g$ para quaisquer $A, B \in |\mathcal{C}|$ e $f, g \in \vec{\mathcal{C}}$. Seja $X \in \mathcal{C}$. Definimos os seguintes funtores.

$$\begin{aligned} (- \otimes -) \otimes - &: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \\ (A, B, C) &\mapsto (A \otimes B) \otimes C; \\ (f, g, h) &\mapsto (f \otimes g) \otimes h. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \otimes (- \otimes -) &: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \\ (A, B, C) &\mapsto A \otimes (B \otimes C); \\ (f, g, h) &\mapsto f \otimes (g \otimes h). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \otimes - &: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \\ A &\mapsto X \otimes A; \\ f &\mapsto 1_X \otimes f. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \otimes X &: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \\ A &\mapsto A \otimes X; \\ f &\mapsto f \otimes 1_X. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\otimes} &: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \\ (A, B) &\mapsto B \otimes A; \\ (f, g) &\mapsto g \otimes f. \end{aligned}$$

Definição A.7.1. *Uma estrutura monoidal (ou tensorial) em \mathcal{C} é uma quina $(\otimes, \mathbb{I}, \alpha, \lambda, \rho)$, onde:*

- (a) $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ é um funtor chamado de produto monoidal (ou tensorial);
- (b) $\mathbb{I} \in \mathcal{C}$ é um objeto chamado de unidade monoidal (ou tensorial);
- (c) $\alpha = \alpha : (- \otimes -) \otimes - \rightarrow - \otimes (- \otimes -)$ é um isomorfismo natural chamado de associador;
- (d) $\lambda = \lambda : \mathbb{I} \otimes - \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ é uma isomorfismo natural chamado de unitor esquerdo;
- (e) $\rho = \rho : - \otimes \mathbb{I} \rightarrow 1_{\mathcal{C}}$ é uma isomorfismo natural chamado de unitor direito;

e de modo que os diagramas abaixo comutam para quaisquer objetos em \mathcal{C} .

$$\begin{array}{ccc}
 & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & \\
 \alpha_{A,B,C} \otimes 1_D \nearrow & & \searrow \alpha_{A,B \otimes C,D} \\
 ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \\
 \downarrow \alpha_{A \otimes B,C,D} & & \downarrow 1_A \otimes \alpha_{B,C,D} \\
 (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C \otimes D}} & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (A \otimes \mathbb{I}) \otimes B & \xrightarrow{\alpha_{A,\mathbb{I},B}} & A \otimes (\mathbb{I} \otimes B) \\
 \downarrow \rho_A \otimes 1_B & & \downarrow 1_A \otimes \lambda_B \\
 A \otimes B & & A \otimes B
 \end{array}$$

Definição A.7.2. Uma categoria monoidal consiste de uma categoria \mathcal{C} equipada com uma estrutura monoidal $(\otimes, \mathbb{I}, \alpha, \lambda, \rho)$.

Se $((A, B), C) \in |(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \times \mathcal{C}|$, escrevemos $\alpha_{((A,B),C)} = \alpha_{ABC}$ ou $\alpha_{((A,B),C)} = \alpha_{A,B,C}$. Os índices dos isomorfismos naturais em questão serão omitidos quando conveniente e não houver possibilidade de confusão.

Definição A.7.3. Um trançamento (em \mathcal{C}) é um isomorfismo natural $\gamma = \gamma : \otimes \rightarrow \tilde{\otimes}$ tal que os diagramas abaixo comutam para quaisquer objetos em \mathcal{C} .

$$\begin{array}{ccc}
 & A \otimes (B \otimes C) & \\
 \alpha_{A,B,C} \nearrow & & \searrow \gamma_{A,B \otimes C} \\
 (A \otimes B) \otimes C & & (B \otimes C) \otimes A \\
 \downarrow \gamma_{A,B} \otimes 1_C & & \downarrow \alpha_{B,C,A} \\
 (B \otimes A) \otimes C & & B \otimes (C \otimes A) \\
 \downarrow \alpha_{B,A,C} & & \uparrow 1_B \otimes \gamma_{A,C} \\
 B \otimes (A \otimes C) & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
& & (A \otimes B) \otimes C & & \\
& \nearrow^{\alpha_{A,B,C}^{-1}} & & \searrow^{\gamma_{A \otimes B, C}} & \\
A \otimes (B \otimes C) & & & & C \otimes (A \otimes B) \\
\downarrow^{1_A \otimes \gamma_{B,C}} & & & & \downarrow^{\alpha_{C,A,B}^{-1}} \\
A \otimes (C \otimes B) & & & & (C \otimes A) \otimes B \\
& \searrow^{\alpha_{A,C,B}^{-1}} & & \nearrow^{\gamma_{A,C} \otimes 1_B} & \\
& & (A \otimes C) \otimes B & &
\end{array}$$

Definição A.7.4. Uma categoria monoidal trançada é uma categoria monoidal equipada com um trançamento.

Definição A.7.5. Um trançamento γ é dito simétrico se $\gamma_{B,A} \circ \gamma_{A,B} = 1_{A \otimes B}$ para quaisquer $A, B \in |\mathcal{C}|$. Uma categoria monoidal simétrica é uma categoria monoidal equipada com um trançamento simétrico.

Exemplo A.7.6. Se uma categoria \mathcal{C} tem um objeto final 1 e existe o produto de quaisquer dois objetos nesta categoria então ela possui uma estrutura natural de categoria monoidal simétrica com unidade monoidal 1 e produto monoidal induzido do produto de objetos (e denotado por \times). Uma categoria monoidal desta forma é chamada de uma categoria cartesiana. Exemplos usuais incluem Set , Top , top , sSet e Cat .

Exemplo A.7.7. Os conceitos usuais de produtos tensoriais induzem estruturas monoidais simétricas nas categorias Ab , Mod_R , GMod_R e Ch_R .

Definição A.7.8. Seja \mathcal{C} uma categoria monoidal simétrica. Um funtor hom interno em \mathcal{C} consiste de um funtor $[-, -] : \mathcal{C} \times \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que para cada $A \in \mathcal{C}$, o funtor induzido $[A, -] : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ é adjunto à direita do funtor $- \otimes A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.

Definição A.7.9. Uma categoria monoidal simétrica fechada é uma categoria monoidal simétrica equipada com um funtor hom interno.

Definição A.7.10. Um cosmo é uma categoria monoidal simétrica fechada e bicompleta.

Exemplo A.7.11. Set , top , Mod_R , GMod_R , Ch_R , Ch_R^+ , sSet e Cat são alguns exemplos de cosmos; contudo Top não admite um funtor hom interno.

De agora em diante, sempre que o contexto sugerir, consideraremos \mathcal{C} sendo uma categoria monoidal sem menção explícita.

Definição A.7.12. Um monoide em \mathcal{C} é um terno $\mathbb{X} = (X, m, u)$ onde:

(a) $X \in \mathcal{C}$;

(b) $m : X \otimes X \rightarrow X \in \vec{\mathcal{C}}$;

(c) $u : \mathbb{I} \rightarrow X \in \vec{\mathcal{C}}$;

e de modo que os diagramas abaixo comutam.

$$\begin{array}{ccccc}
 (X \otimes X) \otimes X & \xrightarrow{\alpha_{X,X,X}} & X \otimes (X \otimes X) & \xrightarrow{1_X \otimes m} & X \otimes X \\
 \downarrow m \otimes 1_X & & & & \downarrow m \\
 X \otimes X & \xrightarrow{\quad m \quad} & X & & \\
 & & & & \\
 \mathbb{I} \otimes X & \xrightarrow{u \otimes 1_X} & X \otimes X & \xleftarrow{1_X \otimes u} & X \otimes \mathbb{I} \\
 & \searrow \lambda_X & \downarrow m & \swarrow \rho_X & \\
 & & X & &
 \end{array}$$

As vezes dizemos que m é a multiplicação do monoide e u é a sua unidade.

Definição A.7.13. Um monoide $\mathbb{X} = (X, m, u)$ em um categoria monoidal simétrica \mathcal{C} é dito ser comutativo se $m \circ \gamma_{(X,X)} = m$, onde γ é o trançamento simétrico de \mathcal{C} .

Exemplo A.7.14. Monoides em Set são monoides ordinários; em Top são os monoides topológicos; em Ab são os anéis (associativos com unidade); em Ch_R são as R -álgebras (\mathbb{Z} -)graduadas diferenciais (DG-álgebras sobre R) e assim por diante.

Definição A.7.15. Sejam $A \in \mathcal{C}$ e $\mathbb{X} = (X, m, u)$ um monoide em \mathcal{C} . Uma ação à esquerda de \mathbb{X} em A é uma flecha $\varphi : X \otimes A \rightarrow A \in \vec{\mathcal{C}}$ tal que os diagramas abaixo comutam.

$$\begin{array}{ccccc}
 (X \otimes X) \otimes A & \xrightarrow{\alpha_{X,X,A}} & X \otimes (X \otimes A) & \xrightarrow{1_X \otimes \varphi} & X \otimes A \\
 \downarrow m \otimes 1_A & & & & \downarrow \varphi \\
 X \otimes A & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & A & & \\
 & & & & \\
 \mathbb{I} \otimes A & \xrightarrow{u \otimes 1_A} & X \otimes A & & \\
 & \searrow \lambda_A & \downarrow \varphi & & \\
 & & A & &
 \end{array}$$

Definição A.7.16. Seja $\mathbb{X} = (X, m, u)$ um monoide em \mathcal{C} . Um \mathbb{X} -módulo à esquerda em \mathcal{C} é um par (A, φ) , onde $A \in \mathcal{C}$ e $\varphi : X \otimes A \rightarrow A \in \vec{\mathcal{C}}$ é uma ação à esquerda de \mathbb{X} em A .

Exemplo A.7.17. Os módulos sobre monoides em (Ab, \otimes) são precisamente os módulos ordinários sobre anéis associativos com unidade.

Ações e módulos à direita são definidos similarmente.

Definição A.7.18. Sejam $\mathbb{X} = (X, m, u)$ e $\mathbb{X}' = (X', m', u')$ monoides em \mathcal{C} . Um morfismo de monoides (entre \mathbb{X} e \mathbb{X}') é uma flecha $f : X \rightarrow X' \in \vec{\mathcal{C}}$ tal que os diagramas abaixo comutam.

$$\begin{array}{ccc} X \otimes X & \xrightarrow{m} & X \\ \downarrow f \otimes f & & \downarrow f \\ X' \otimes X' & \xrightarrow{m'} & X' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{I} & \xrightarrow{u} & X \\ & \searrow u' & \downarrow f \\ & & X' \end{array}$$

Definição A.7.19. Seja $\mathbb{X} = (X, m, u)$ um monoide e sejam (A, φ) e (A', φ') \mathbb{X} -módulos à esquerda em \mathcal{C} . Um morfismo de \mathbb{X} -módulos (entre (A, φ) e (A', φ')) é uma flecha $f : A \rightarrow A' \in \vec{\mathcal{C}}$ tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} X \otimes A & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \downarrow 1_X \otimes f & & \downarrow f \\ X \otimes A' & \xrightarrow{\varphi'} & A' \end{array}$$

Definição A.7.20. Um comonoide em \mathcal{C} é um terno $\mathbb{X} = (X, \Delta, \varepsilon)$ onde:

- (a) $X \in \mathcal{C}$;
- (b) $\Delta : X \rightarrow X \otimes X \in \vec{\mathcal{C}}$;
- (c) $\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{I} \in \vec{\mathcal{C}}$;

e de modo que $(1_X \otimes \Delta)\Delta = \alpha_{XXX}(\Delta \otimes 1_X)\Delta$, $(\varepsilon \otimes 1_X)\Delta = \lambda_X^{-1}$ e $(1_X \otimes \varepsilon)\Delta = \rho_X^{-1}$.

As vezes dizemos que Δ é a comultiplicação do comonoide e ε é a sua counidade.

Por exemplo, os comonoides em Mod_R são as R -coálgebras e em Ch_R são as R -coálgebras (\mathbb{Z}) -graduadas diferenciais (DG-coálgebras sobre R).

Definição A.7.21. *Seja $\mathbb{X} = (X, \Delta, \varepsilon)$ um comonoide em \mathcal{C} . Um \mathbb{X} -comódulo à esquerda em \mathcal{C} é um par (A, φ) , onde $A \in \mathcal{C}$, $\varphi : A \rightarrow X \otimes A \in \overrightarrow{\mathcal{C}}$ é uma coação à esquerda de \mathbb{X} em A , isto é, $(1_X \otimes \varphi)\varphi = \alpha_{XXA}(\Delta \otimes 1_A)\varphi$ e $(\varepsilon \otimes 1_A)\varphi = \lambda_A^{-1}$.*

Por exemplo, em Ch_R módulos e comódulos são, respectivamente, DG-módulos sobre DG-álgebras sobre R e DG-comódulos sobre DG-coálgebras sobre R .

Morfismos de comonoides e morfismos de comódulos são definidos de maneira natural, assim como coações e comódulos à direita.

Apêndice B

Árvores

Neste apêndice reunimos conceitos sobre árvores necessários para a definição da operada de árvores em Set , a construção de operadas livres em um cosmo \mathcal{V} e para apresentarmos a construção de Boardman-Vogt no Apêndice C, usada no capítulo 3.

As definições da primeira seção seguem as definições encontradas em [45, 46, 47]. A linguagem e as notações envolvendo árvores coloridas e árvores métricas não seguem fielmente qualquer referência.

B.1 Árvores

Para os propósitos deste trabalho a definição de árvore é a seguinte.

Definição B.1.1. *Uma árvore T é um grafo simples, conexo, acíclico, finito e com ao menos dois vértices.*

O conjunto de vértices de T é denotado por $V(T)$ e o conjunto de arestas por $E(T)$. O grau de um vértice é o número de arestas incidentes a ele. Uma árvore com n vértices tem precisamente $n - 1$ arestas ($n \geq 2$).

Em uma árvore, um caminho entre vértices distintos u e v é uma $(m + 1)$ -upla ($m \geq 1$) de vértices dois a dois distintos (v_0, v_1, \dots, v_m) tal que $v_0 = u$, $v_m = v$ e $\{v_{i-1}, v_i\}$ é uma aresta de T para qualquer $1 \leq i \leq m$. Por convenção, dizemos que $(v_0 = v)$ é um caminho entre v e v .

Existe um único caminho entre quaisquer $u, v \in V(T)$ em uma árvore, denotado por \overrightarrow{uv} .

Sejam $u, v, w \in V(T)$. Dizemos que \overrightarrow{uv} passa por w se w for igual a alguma componente de \overrightarrow{uv} .

Definição B.1.2. *Uma árvore plantada é uma árvore T equipada com um vértice r_T de grau 1, chamado de raiz.*

Em uma árvore plantada, se $\{u, v\} \in E(T)$ e $\overrightarrow{r_T v}$ passa por u , então dizemos que v é filho de u .

Convenção B.1.3. *A partir de agora sempre escreveremos uma aresta qualquer de árvore plantada T como um par ordenado de vértices supondo que o segundo vértice é filho do primeiro, ou seja, estamos dando uma orientação para T .*

Definição B.1.4. Uma estrutura planar em uma árvore plantada T é uma ordem total \preceq em $V(T)$ que cumpre, para quaisquer $u, v \in V(T)$, o seguinte:

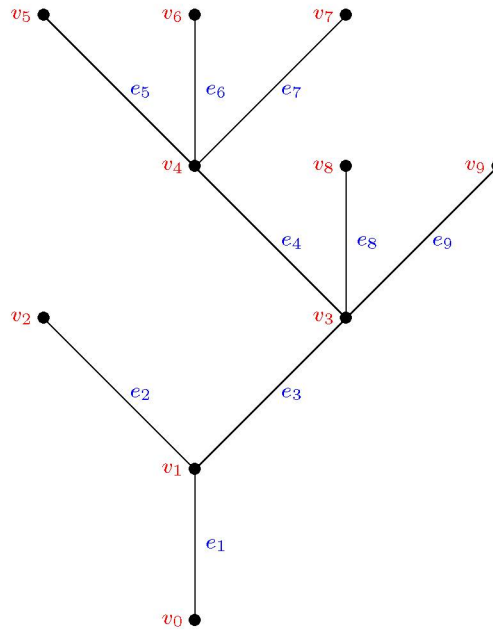
- (a) Se $\overrightarrow{r_T v}$ passa por u então $u \preceq v$;
- (b) Suponha que $\overrightarrow{r_T v}$ não passa por u e $\overrightarrow{r_T u}$ não passa por v e escrevamos $\overrightarrow{r_T u} = (u_0, u_1, \dots, u_m)$ e $\overrightarrow{r_T v} = (v_0, v_1, \dots, v_n)$. Seja $0 \leq j \leq \max\{m, n\} - 1$, tal que $u_i = v_i$ para todo $0 \leq i \leq j$ e $u_{j+1} \neq v_{j+1}$. Se $u_{j+1} \preceq v_{j+1}$, então $u \preceq v$.

Uma estrutura planar em T determina e é determinada uma ordem total no conjunto de filhos de cada vértice. Uma estrutura planar em T determina uma ordem total em $E(T)$, vista como um conjunto de pares ordenados dados pela orientação determinada pela raiz de T . A ordem em $E(T)$ é a ordem lexicográfica com respeito a $V(T)$.

Definição B.1.5. Uma árvore plantada planar é uma árvore plantada T equipada com uma estrutura planar.

Sempre que considerarmos uma ordem total em algum subconjunto de $V(T)$ ou de $E(T)$ será, naturalmente, a ordem total induzida da estrutura planar de T .

Na árvore plantada planar T abaixo, v_0 é a raiz e a estrutura planar é indicada pelos índices dos vértices. A ordem total em $E(T)$ induzida pela estrutura planar é indicada pelos índices das arestas. Ademais, v_4, v_8 e v_9 são os filhos de v_3 .



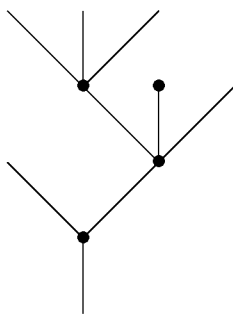
Definição B.1.6. Uma árvore plantada planar com folhas (APPF) é uma árvore plantada planar T equipada com um conjunto $L(T)$ de vértices de grau 1, diferentes da raiz, chamados de folhas.

Definição B.1.7. Seja T uma APPF. A única aresta incidente à raiz de T é chamada de tronco. Uma aresta incidente a uma folha de T é chamada de galho.

Definição B.1.8. *Vértices diferentes da raiz e das folhas são chamados de vértices internos. O conjunto de vértices internos de T é denotado por $\iota(T)$. Um vértice interno de grau 1 é chamado de fruto. Arestas diferentes do tronco e dos galhos são chamadas de arestas internas. O conjunto de arestas internas de T é denotado por $\epsilon(T)$.*

Por convenção desenhamos uma APPF T omitindo as folhas e a raiz, porém o tronco de T sempre é desenhado da parte de baixo de T .

Na APPF T abaixo, a estrutura planar é a mesma da árvore anterior. Os vértices desenhados são os vértices internos, os demais, não desenhados, são as folhas e a raiz. T possui 3 arestas internas e um fruto.



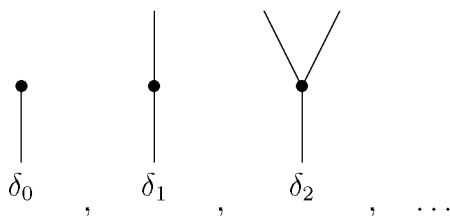
Definição B.1.9. *Um isomorfismo entre APPFs T e S consiste de uma bijeção entre $V(T)$ e $V(S)$ que preserva raízes, folhas, estruturas planares e arestas. Para cada $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{T}_n denota o conjunto de classes de isomorfismo de APPFs com n folhas. Se T é uma APPF com n folhas, então sua classe em \mathcal{T}_n será denotada por $[T]$ ou também por T , sempre que conveniente.*

Definição B.1.10. *A (classe de isomorfismo da) árvore com uma só folha e uma só aresta,*



é chamada de árvore trivial e denotada por \mathcal{U} .

Definição B.1.11. *A (classe de isomorfismo da) árvore com n -folhas e apenas um vértice interno é chamada de n -corola e denotada por δ_n .*



B.2 Árvores coloridas

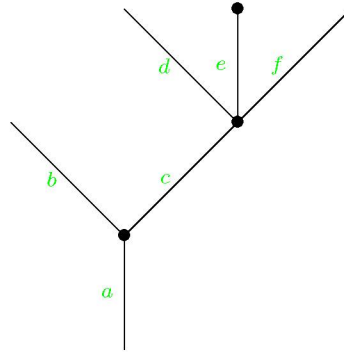
A partir de agora uma árvore significará uma APPF e C sempre denotará um conjunto não vazio, cujos elementos chamaremos de cores. Associamos a C o conjunto $\underline{C} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C^{n+1}$.

Um elemento de C^{n+1} é tipicamente denotado por $(c_1, \dots, c_n; c)$, que no caso $n = 0$ significa $(; c)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e qualquer símbolo x , x_n significará x_1, \dots, x_n , que no caso $n = 0$ significa uma expressão vazia. O número de elementos de um conjunto finito qualquer A será denotado por $\sharp A$.

Definição B.2.1. *Uma C -árvore (também chamada de uma árvore C -colorida) é uma árvore T equipada com uma $\sharp E(T)$ -upla de cores $(c_1, \dots, c_{\sharp E(T)})$. Uma C -árvore é denotada então por $(T, c_1, \dots, c_{\sharp E(T)})$ ou apenas por T sempre que conveniente. Dizemos que a i -ésima aresta de T tem cor c_i ou é colorida por c_i .*

Quando C for um conjunto unitário, nós identificaremos C -árvores com árvores, ou, o contrário, conforme for conveniente.

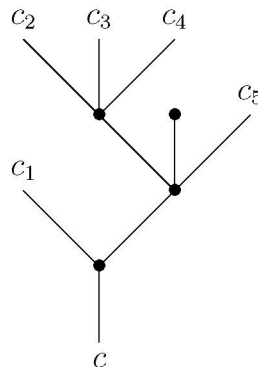
Segue abaixo uma representação de uma C -árvore, onde $a, b, c, d, e, f \in C$.



Convenção B.2.2. *Neste apêndice $(c_n; c)$ sempre denotará um elemento de \underline{C} para algum $n \in \mathbb{N}$.*

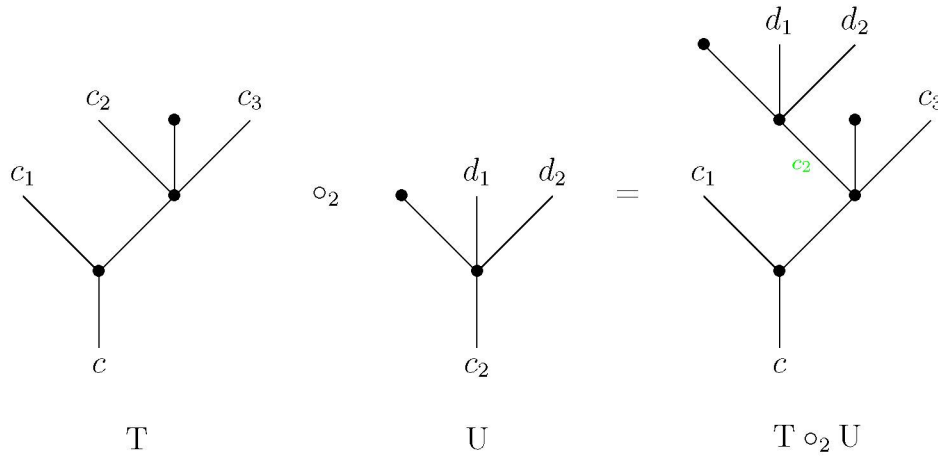
Definição B.2.3. *Uma $(c_n; c)$ -árvore é uma C -árvore T com n folhas tal que o i -ésimo galho é colorido por c_i e o tronco é colorido por c . Não há restrições quanto as cores das arestas internas de uma $(c_n; c)$ -árvore.*

Geralmente representamos uma $(c_n; c)$ -árvore como abaixo. As cores das arestas internas serão representadas, ou não, de acordo com a conveniência.



Definição B.2.4. Um isomorfismo entre $(c_n; c)$ -árvores é um isomorfismo de árvores que preserva cores. Para cada $(c_n; c) \in \underline{C}$, $\mathcal{T}_{(c_n; c)}$ denota o conjunto de classes de isomorfismo de $(c_n; c)$ -árvores. Se T é uma $(c_n; c)$ -árvore, então sua classe em $\mathcal{T}_{(c_n; c)}$ será denotada por $[T]$ ou também por T , sempre que conveniente.

Definição B.2.5 (A operação de enxertar C-árvores). Sejam $m \geq 1$, $1 \leq i \leq m$, $n \geq 0$, T uma $(c_m; c)$ -árvore e U uma $(d_n; c_i)$ -árvore. A $(c_1, \dots, c_{i-1}, d_1, \dots, d_n, c_{i+1}, \dots, c_m; c)$ -árvore $T \circ_i U$ é definida enxertando-se o tronco de U no i -ésimo galho de T , conforme sugere a representação abaixo.



As cores das arestas internas de T e U são conservadas na árvore $T \circ_i U$ obtida.

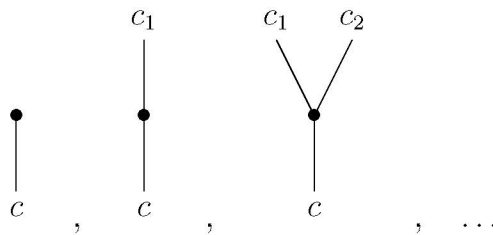
A definição rigorosa da árvore $T \circ_i U$ é facilmente deduzida e não será feita aqui. Outro fato, também não verificado aqui, é que a operação de enxertar C-árvores está bem definida nas classes de isomorfismo destas.

Definição B.2.6. Para cada $c \in C$, a (classe de isomorfismo da) C-árvore com uma só folha e uma só aresta, e esta colorida por c ,



é chamada de c -árvore trivial e denotada por \mathcal{U}_c . Note que tais árvores são unidades para a operação de enxerto de C-árvores.

Definição B.2.7. A (classe de isomorfismo da) $(c_n; c)$ -árvore com apenas um vértice interno é chamada de $(c_n; c)$ -corola e denotada por $\delta_{(c_n; c)}$.

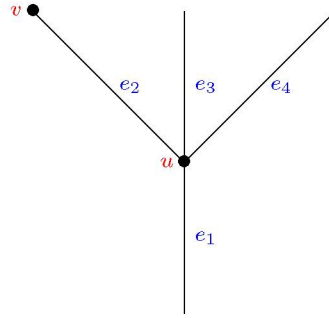


Para a construção de operadas livres precisamos das seguintes duas definições.

Definição B.2.8. *Sejam T uma C -árvore e $u \in \iota(T)$. Se $e = (u, v) \in E(T)$, então dizemos que e é convergente a u . Se $f = (w, u) \in E(T)$, então dizemos que f é divergente a u .*

Todo vértice interno possui uma única aresta divergente a ele e um conjunto possivelmente vazio de arestas convergentes a ele. Mais precisamente, os únicos vértices internos sem arestas convergentes a eles são os frutos.

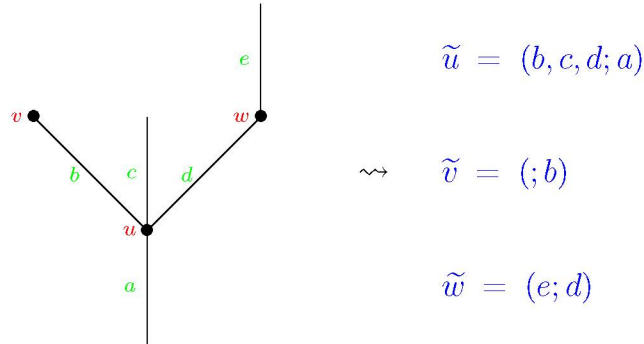
Na C -árvore T abaixo, não há arestas convergentes a v e e_2 é a aresta divergente a v . As arestas e_2, e_3 e e_4 são convergentes a u e e_1 é a aresta divergente a u .



Definição B.2.9. *Sejam T uma C -árvore e $v \in \iota(T)$. Suponha que v tem $k \geq 0$ arestas convergentes a ele e suponha que a i -ésima aresta convergente a v é colorida por $d_i \in C$ e que a aresta divergente a v é colorida por $d \in C$. Definimos então*

$$\tilde{v} := (d_{\underline{k}}; d) \in \underline{C}.$$

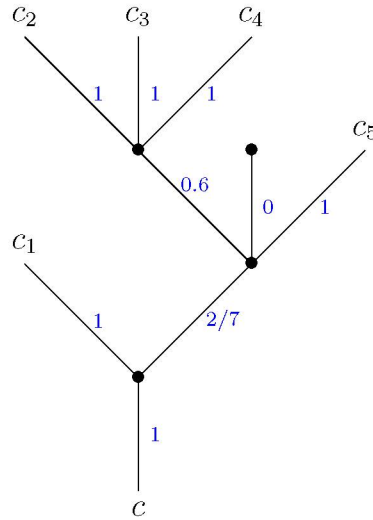
Note que a definição acima só depende da classe de isomorfismo de T . Abaixo $a, b, c, d, e \in C$.



B.3 Árvores métricas

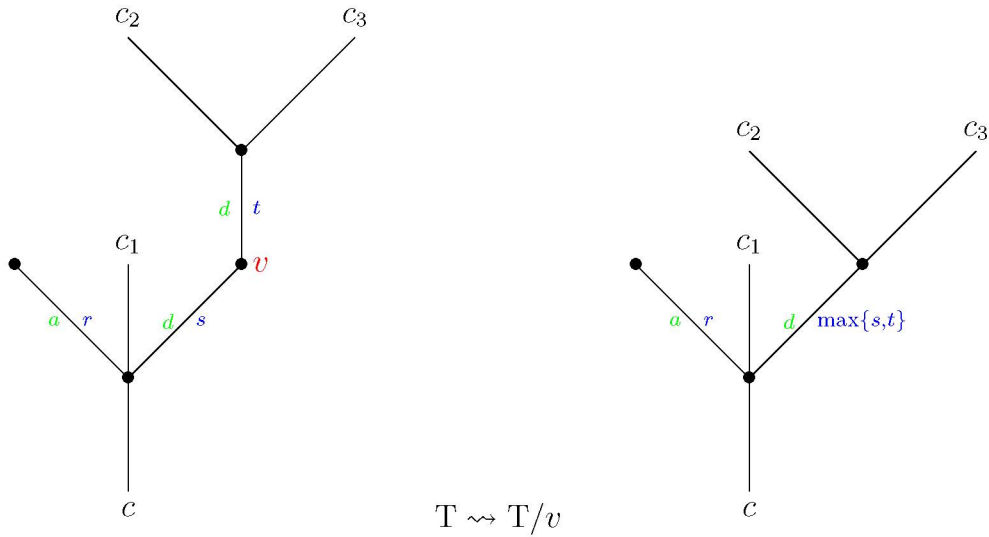
Nesta seção definimos árvores métricas a fim de apresentarmos a \mathbb{W} -construção ou construção de Boardman-Vogt sobre operadas topológicas no Apêndice C. No que segue $[0, 1]$ denota o intervalo unitário da reta usual.

Definição B.3.1. *Uma $(c_n; c)$ -árvore métrica é uma $(c_n; c)$ -árvore T equipada com uma $\sharp \epsilon(T)$ -upla $(T, t_1, \dots, t_{\sharp \epsilon(T)})$. Dizemos que a i -ésima aresta interna de T tem comprimento t_i . Para as identificações da \mathbb{W} -construção nós convencionamos que o tronco e os galhos de uma árvore qualquer têm comprimento 1.*

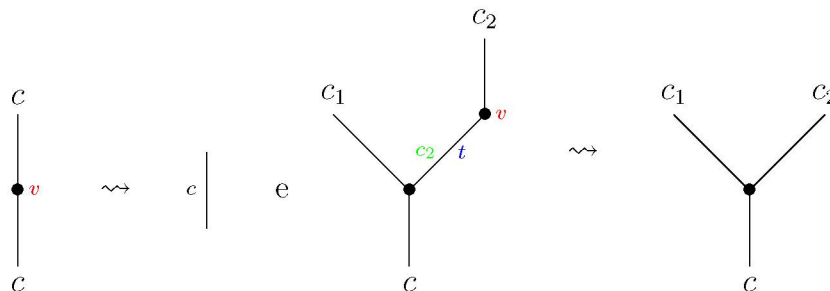


As duas próximas definições são necessárias para estabelecermos as identificações que definem a \mathbb{W} -construção via espaços quocientes.

Definição B.3.2. *Seja T uma $(c_n; c)$ -árvore métrica e seja v um vértice interno de T tal que $\tilde{v} = (d; d)$ para algum $d \in C$. A $(c_n; c)$ -árvore métrica T/v é obtida transformando-se as (duas únicas) arestas incidentes a v em uma única aresta de cor d e comprimento igual ao máximo dos comprimentos destas arestas e conservando-se os demais dados da árvore, conforme sugere a representação abaixo ($a, d \in C, r, s, t \in [0, 1]$).*

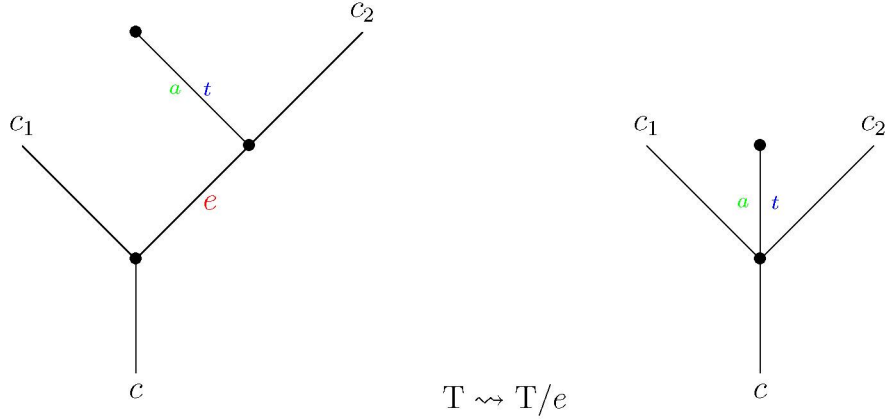


Em particular



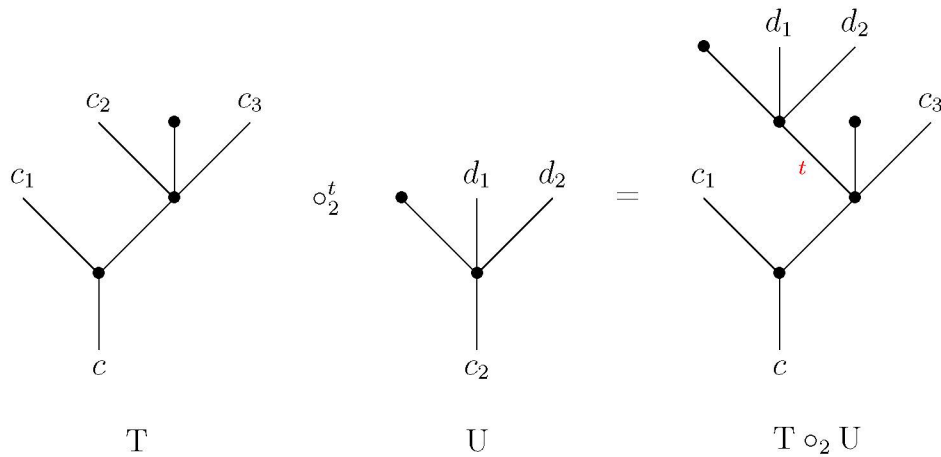
Note que esse procedimento está bem definido em classes de isomorfismo.

Definição B.3.3. *Seja T uma $(c_n; c)$ -árvore métrica e seja e uma aresta interna de T . A $(c_n; c)$ -árvore métrica T/e é obtida contraindo-se a aresta e em um único vértice e conservando-se os demais dados da árvore, conforme sugere a representação abaixo, onde $t \in [0, 1]$ e $a \in C$. Notemos que o comprimento e a cor de e não tem qualquer influência em T/e .*



Note também que esse procedimento de contrair arestas internas está bem definido em classes de isomorfismo.

Definição B.3.4 (A operação de enxertar C -árvores métricas). *Sejam $t \in [0, 1]$, $m \geq 1$, $1 \leq i \leq m$, $n \geq 0$, T uma $(c_m; c)$ -árvore métrica e U uma $(d_n; c_i)$ -árvore métrica. A $(c_1, \dots, c_{i-1}, d_1, \dots, d_n, c_{i+1}, \dots, c_m; c)$ -árvore métrica $T \circ_i^t U$ é definida enxertando-se o tronco de U no i -ésimo galho de T e definindo comprimento t caso esse enxerto crie uma aresta interna (isso só não ocorre se T ou S for a (classe de isomorfismo da) c_i -árvore trivial), conforme sugere a representação abaixo.*



Note que os demais dados de T e S são preservados em $T \circ_i^t S$ e que essa operação está bem definida em classes de isomorfismo, como usual. Quando $t = 1$ nós escreveremos apenas $\circ_i^1 := \circ_i$.

Apêndice C

A construção de Boardman-Vogt

Nas primeiras três seções definimos operadas livres e apresentamos a construção de Boardman-Vogt (cf. [4, 5, 6, 8, 44]) sobre operadas topológicas.

Fixemos um conjunto não vazio C e um cosmo \mathcal{V} (isto é, uma categoria monoidal simétrica fechada e bicompleta) com unidade monoidal \mathbb{I} .

Neste apêndice, uma árvore significará uma C -árvore, uma operada (respectivamente coleção, coleção pontuada) significará uma C -operada (respectivamente C -coleção, C -coleção pontuada) sobre \mathcal{V} e a categoria associada será denotada por $\text{Op}(\mathcal{V})$ (respectivamente $\text{Coll}(\mathcal{V})$, $\text{Coll}^\bullet(\mathcal{V})$). Além disso, $(c_{[n]}, c)$ sempre denotará um elemento de \underline{C} para algum $n \in \mathbb{N}$. Referimos o capítulo 2 para mais detalhes.

Na quarta seção nós construiremos um morfismo de operadas entre as operadas topológicas $\mathbb{W}\text{Act}$ e Act_∞ .

C.1 Operadas livres

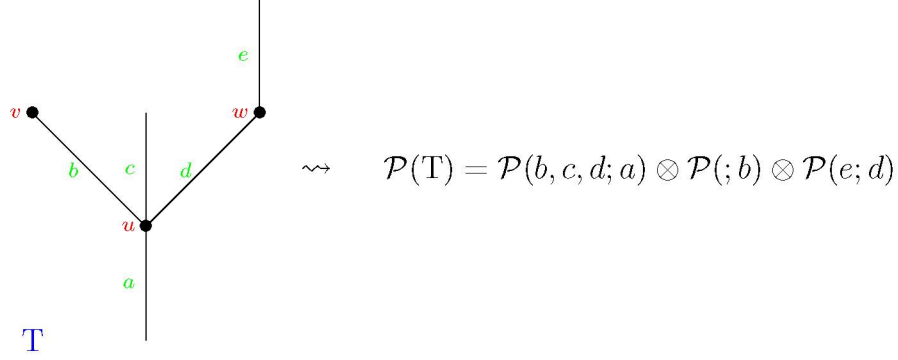
Nesta seção construímos as operadas livres geradas por coleções e coleções pontuadas. Tal construção, assim como a construção de Boardman-Vogt, explicita a íntima relação entre operadas e árvores. Referimos a Definição A.2.9 para a notação \tilde{v} , usada abaixo.

Definição C.1.1. *Sejam \mathcal{P} uma coleção e T uma árvore. Definimos*

$$\mathcal{P}(T) := \bigotimes_{v \in \iota(T)} \mathcal{P}\tilde{v}.$$

Se $\iota(T) = \emptyset$, definimos $\mathcal{P}(T) := \mathbb{I}$, caso contrário os fatores em $\mathcal{P}(T)$ são ordenados de acordo com a ordem dos vértices internos de T .

Note que $\mathcal{P}(T)$ só depende da classe de isomorfismo de T .



Definição C.1.2. Seja \mathcal{P} um coleção. A operada livre sobre \mathcal{P} , denotada \mathcal{FP} , é definida como segue.

$$\mathcal{FP}(c_{\underline{n}}; c) := \coprod_{T \in \mathcal{T}(c_{\underline{n}}; c)} \mathcal{P}(T).$$

(a) Para cada $c \in C$ a unidade $u_c : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{FP}(c; c)$ é definida como a flecha de estrutura do coproduto em \mathcal{U}_c (pois \mathcal{U}_c não possui vértices internos, logo $\mathcal{P}(\mathcal{U}_c) = \mathbb{I}$);

(b) Sejam $m \geq 1$, $1 \leq i \leq m$ e $(c_{\underline{m}}; c), (d_{\underline{n}}; c_i) \in \underline{C}$.

Para cada $T \in \mathcal{T}(c_{\underline{m}}; c)$ e $U \in \mathcal{T}(d_{\underline{n}}; c_i)$ existe um isomorfismo

$$\chi_{T,U} : \mathcal{P}(T) \otimes \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(T \circ_i U),$$

induzido pelos associadores e trançamentos simétricos em \mathcal{V} , pois o conjunto de fatores em $\mathcal{P}(T \circ_i U)$ é precisamente a união disjunta dos conjuntos de fatores em $\mathcal{P}(T)$ e em $\mathcal{P}(U)$, consequência da construção da árvore $T \circ_i U$.

A composição operádica

$$\circ_i : \mathcal{FP}(c_{\underline{m}}; c) \otimes \mathcal{FP}(d_{\underline{n}}; c_i) \rightarrow \mathcal{FP}(c_{\underline{i-1}}, d_{\underline{n}}, c_{i+1}, \dots, c_m; c)$$

é definida como a composta abaixo. A primeira flecha é um isomorfismo decorrente da estrutura monoidal fechada de \mathcal{V} .

$$\begin{array}{ccc}
 \left(\coprod_{T \in \mathcal{T}(c_{\underline{m}}; c)} \mathcal{P}(T) \right) \otimes \left(\coprod_{U \in \mathcal{T}(d_{\underline{n}}; c_i)} \mathcal{P}(U) \right) & & \\
 \downarrow \cong & & \\
 \coprod_{T \in \mathcal{T}(c_{\underline{m}}; c), U \in \mathcal{T}(d_{\underline{n}}; c_i)} \mathcal{P}(T) \otimes \mathcal{P}(U) & & \\
 \downarrow \bigoplus_{[T] \in \mathcal{T}(c_{\underline{m}}; c), [U] \in \mathcal{T}(d_{\underline{n}}; c_i)} \chi_{T,U} & & \\
 \coprod_{Z \in \mathcal{T}(c_{\underline{i-1}}, d_{\underline{n}}, c_{i+1}, \dots, c_m; c)} \mathcal{P}(Z) & &
 \end{array}$$

Se \mathcal{P} é uma operada, a notação $\mathcal{F}\mathcal{P}$ significará que estamos considerando a operada livre sobre a coleção subjacente a \mathcal{P} .

O comportamento de \mathcal{F} sobre morfismos é descrito a seguir. Seja $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ um morfismo de coleções e seja T uma árvore. Definimos

$$\begin{aligned} f(T) : \mathcal{P}(T) &\rightarrow \mathcal{Q}(T) \\ f(T) &:= \bigotimes_{v \in \iota(T)} f\tilde{v} \end{aligned}$$

e o morfismo de operadas livres

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f : \mathcal{F}\mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{F}\mathcal{Q} \\ \mathcal{F}f_{(c_n; c)} &:= \bigoplus_{T \in \mathcal{T}_{(c_n; c)}} f(T). \end{aligned}$$

Seja $\mathcal{U} : \text{Op}(\mathcal{V}) \rightarrow \text{Coll}(\mathcal{V})$ o funtor esquecimento. Os funtores \mathcal{F} e \mathcal{U} formam uma adjunção livre-esquecimento (com \mathcal{F} adjunto à esquerda de \mathcal{U})

$$\mathcal{F} : \text{Coll}(\mathcal{V}) \rightleftarrows \text{Op}(\mathcal{V}) : \mathcal{U}.$$

No que segue construímos a operada livre sobre uma coleção pontuada.

Sejam \mathbb{I}_C a operada inicial em $\text{Op}(\mathcal{V})$ e \mathcal{P} uma coleção pontuada. Considere o morfismo de coleções $u : \mathbb{I}_C \rightarrow \mathcal{P}$ induzido das pontuações de \mathcal{P} . Ademais, se verifica que há um isomorfismo canônico $i : \mathcal{F}\mathbb{I}_C \rightarrow \mathbb{I}_C$ de operadas.

Definição C.1.3. A operada livre sobre uma coleção pontuada \mathcal{P} , denotada $\mathcal{F}^\bullet \mathcal{P}$, é definida pelo pushout em $\text{Op}(\mathcal{V})$ abaixo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}\mathbb{I}_C & \xrightarrow{\mathcal{F}u} & \mathcal{F}\mathcal{P} \\ \downarrow i & & \downarrow \\ \mathbb{I}_C & \dashrightarrow & \mathcal{F}^\bullet \mathcal{P} \end{array}$$

Essa construção define um funtor $\mathcal{F}^\bullet : \text{Coll}^\bullet(\mathcal{V}) \rightarrow \text{Op}(\mathcal{V})$, adjunto à esquerda do funtor esquecimento $\mathcal{U}^\bullet : \text{Op}(\mathcal{V}) \rightarrow \text{Coll}^\bullet(\mathcal{V})$.

$$\mathcal{F}^\bullet : \text{Coll}^\bullet(\mathcal{V}) \rightleftarrows \text{Op}(\mathcal{V}) : \mathcal{U}^\bullet.$$

Pode-se verificar que $\mathcal{F}^\bullet \mathcal{P}$ pode ser tomada de modo que $\mathcal{U}\mathcal{F}^\bullet \mathcal{P} = \mathcal{U}\mathcal{F}\mathcal{P}$. Mais detalhes sobre operadas livres podem ser encontrados em [5, 6, 18].

C.2 Operadas topológicas

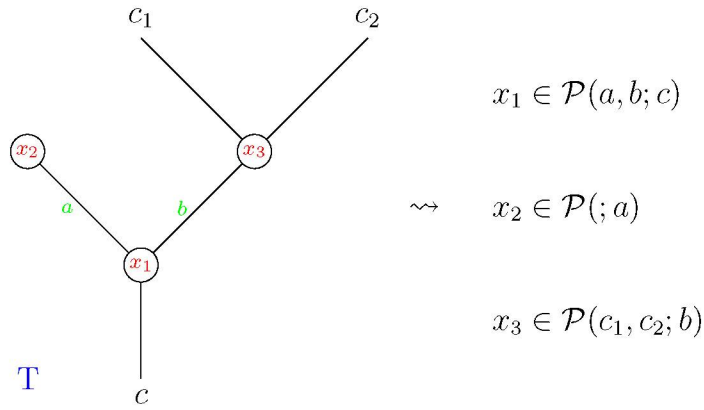
De agora em diante trabalharemos sobre o cosmo $(\text{top}, \times, \{*\})$ dos espaços topológicos compactamente gerados (conforme capítulo 1). Como de costume, operadas e coleções sobre este cosmo são chamadas, respectivamente, de operadas topológicas e coleções topológicas.

Se \mathcal{P} é uma operada topológica e $c \in C$, então a unidade de \mathcal{P} em c equivale a um elemento de $u_c \in \mathcal{P}(c; c)$.

No que segue nós descrevemos brevemente a operada livre de uma coleção topológica em termos de pontos a fim de fixarmos notação para a próxima seção.

Sejam \mathcal{P} uma coleção topológica e T uma $(c_n; c)$ -árvore. Note que se $T = \mathcal{U}_c$ para algum $c \in C$ então $\mathcal{U}_c \in \mathcal{FP}(c; c)$ para cada $c \in C$ (aqui estamos identificando \mathcal{U}_c com $(\mathcal{U}_c, *)$).

Se T não está na classe de \mathcal{U}_c para algum $c \in C$ então que $\iota(T) \neq \emptyset$. Neste caso um elemento típico de $\mathcal{FP}(c_n; c)$ é denotado por (T, x_1, \dots, x_k) ou (T, x_k) , onde $\iota(T) = \{v_1, \dots, v_k\}$ e $x_i \in \mathcal{P}\tilde{v}_i$. Abaixo temos uma representação de (T, x_k) .



No que segue definimos a counidade da adjunção

$$\mathcal{F}^\bullet : \text{Coll}^\bullet(\text{top}) \rightleftarrows \text{Op}(\text{top}) : \mathcal{U}^\bullet,$$

a fim de discutirmos a \mathbb{W} -construção na próxima seção.

Seja \mathcal{P} uma operada topológica. A counidade $\varepsilon : \mathcal{F}^\bullet \mathcal{U}^\bullet \rightarrow 1$ da adjunção $\mathcal{F}^\bullet \dashv \mathcal{U}^\bullet$ é definida como segue. Seja T uma árvore.

(a) Se $T = \mathcal{U}_c$ para algum $c \in C$ então $\mathcal{U}_c \in \mathcal{F}^\bullet \mathcal{P}(c; c)$ e definimos $\varepsilon_{\mathcal{P}}^{(c; c)}(\mathcal{U}_c) := u_c \in \mathcal{P}(c; c)$;

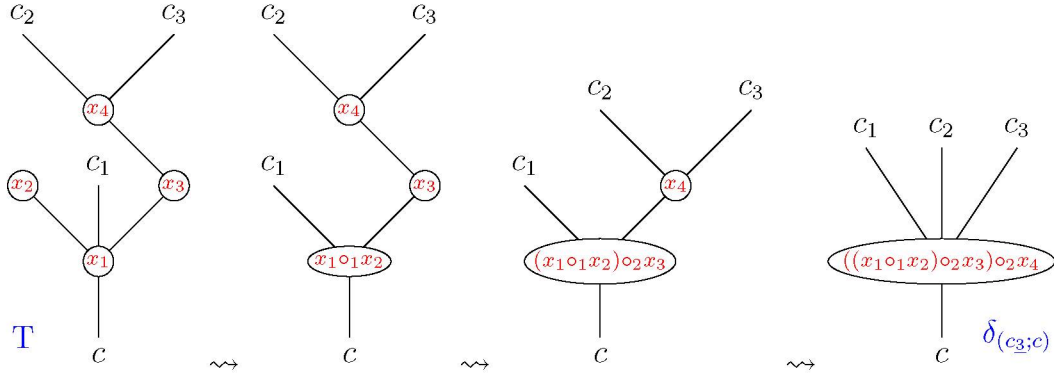
(b) Se T tem apenas um vértice interno então T está na classe de isomorfismo de alguma $(c_n; c)$ -corola. Logo se $x \in \mathcal{P}(c_n; c)$, então $(T, x) \in \mathcal{F}^\bullet \mathcal{P}(c_n; c)$. Definimos então $\varepsilon_{\mathcal{P}}^{(c_n; c)}(T, x) := x$;

(c) Seja T é uma $(c_n; c)$ -árvore com ao menos dois vértices internos e seja $(T, x_k) \in \mathcal{F}^\bullet \mathcal{P}(c_n; c)$.

Então $\varepsilon_{\mathcal{P}}^{(c_n; c)}(T, x_k)$ é definido indutivamente utilizando as composições

$$\circ_i : \mathcal{P}(c_{\underline{n}}; c) \times \mathcal{P}(d_{\underline{n}}; c_i) \rightarrow \mathcal{P}(c_{i-1}, d_{\underline{n}}, c_{i+1}, \dots, c_m; c)$$

de \mathcal{P} conforme sugere a representação abaixo. O leitor interessado pode inferir uma definição rigorosa de $\varepsilon_{\mathcal{P}}^{(c_n; c)}(T, x_k)$.



$$(T, x_4) \in \mathcal{FP}(c_3; c) \mapsto ((x_1 \circ_1 x_2) \circ_2 x_3) \circ_2 x_4 \in \mathcal{P}(c_3; c).$$

C.3 W-construção

Nesta seção apresentaremos a construção de Boardman-Vogt sobre operadas topológicas. Nossa abordagem segue a de [44], onde adaptamos para o caso colorido. A referência original [8] cobre o caso de operadas topológicas simétricas.

Para a generalização da construção de Boardman-Vogt sobre operadas simétricas em categorias monoidais referimos [4, 5, 6].

A construção de Boardman-Vogt também é chamada de \mathbb{W} -construção.

Precisamente, a \mathbb{W} -construção é um endofuntor $\mathbb{W} : \text{Op}(\text{top}) \rightarrow \text{Op}(\text{top})$ acompanhado com uma transformação natural $\Upsilon : \mathbb{W} \rightarrow 1$.

Lembremos que a estrutura modelo considerada em $\text{Op}(\text{top})$ é dada por fibrações e equivalências fracas definidas, para cada cor, como em top (com a estrutura modelo de Quillen), conforme capítulo 3, seção 2. A importância da \mathbb{W} -construção para a teoria de homotopia de operadas é que ela fornece uma resolução cofibrante para certas operadas topológicas.

A \mathbb{W} -construção é similar a construção de operadas livres, contudo neste caso utilizamos árvores métricas e algumas identificações são necessárias. Para o que, o número de arestas internas de uma árvore T qualquer será denotado por $|T|$.

Definição C.3.1. *Seja \mathcal{P} uma operada topológica. Para cada $(c_{\underline{n}}; c)$ definimos a coleção topológica*

$$\mathcal{P}^{\mathbb{W}}(c_{\underline{n}}; c) := \coprod_{T \in \mathcal{T}(c_{\underline{n}}; c)} [0, 1]^{|T|} \times \mathcal{P}(T).$$

Um elemento típico de $\mathcal{P}^{\mathbb{W}}(c_{\underline{n}}; c)$ é denotado por $(T, t_1, \dots, t_{|T|}, x_1, \dots, x_k)$ ou (T, x_k) , onde T é identificada com a árvore métrica $(T, t_1, \dots, t_{|T|})$. Como na seção anterior, estamos supondo que $\iota(T) = \{v_1, \dots, v_k\}$ e que $x_i \in \mathcal{P}(\tilde{v}_i)$.

Definição C.3.2. *Seja \mathcal{P} uma operada topológica. Para cada $(c_n; c)$ definimos a coleção topológica*

$$\mathbb{WP}(c_n; c) := \mathcal{P}^\sharp(c_n; c) / \equiv,$$

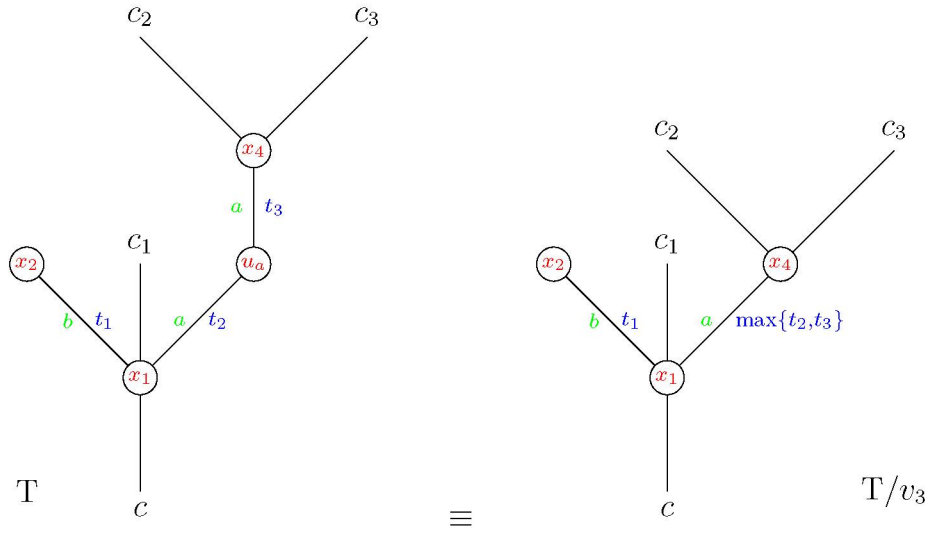
onde a relação de equivalência \equiv é gerada pelas identificações abaixo.

Para o que segue, seja u_a a unidade de $\mathcal{P}(a; a)$ para cada $a \in C$. Referimos o apêndice B para as construções T/v e T/e com árvores métricas.

Seja $(T, x_k) \in \mathcal{P}^\sharp(c_n; c)$.

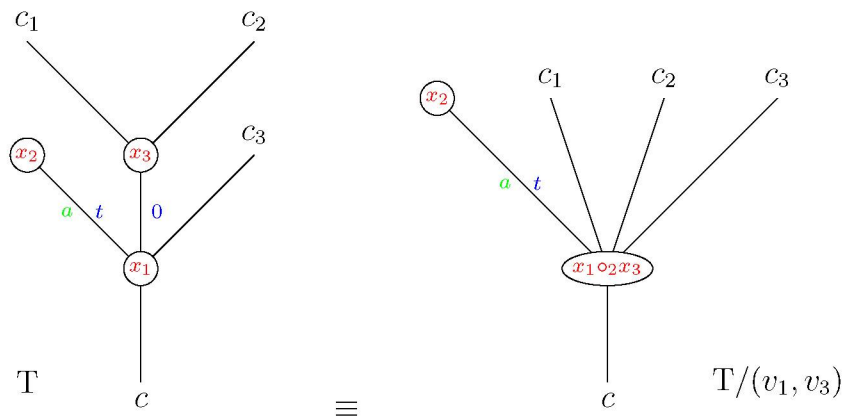
(a) Suponha que $x_i = u_a$ para algum $1 \leq i \leq k$ e algum $a \in C$. Então

$$(T, x_1, \dots, x_{i-1}, u_a, x_{i+1}, \dots, x_m) \equiv (T/v_i, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m);$$



(b) Suponha que $e = (v_i, v_j) \in \epsilon(T)$, que e é a l -ésima aresta convergente a v_i e que o comprimento de e é 0. Então

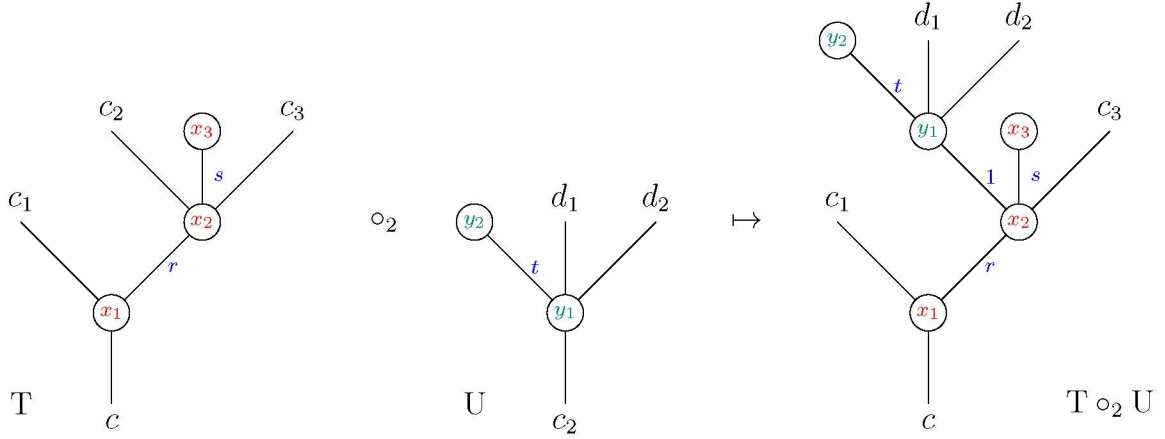
$$\begin{aligned} (T, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_k) \\ \equiv \\ (T/e, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i \circ_l x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k); \end{aligned}$$



Definição C.3.3. *Seja \mathcal{P} uma operada topológica. A \mathbb{W} -contrução de \mathcal{P} é denotada por $\mathbb{W}\mathcal{P}$ e definida pela coleção topológica anterior junto com unidades e composições descritas a seguir.*

Para cada $c \in C$, a unidade U_c em $\mathbb{W}\mathcal{P}(c; c)$ é $[U_c] = [\delta_{(c;c)}, u_c]$, onde u_c é a unidade de $\mathcal{P}(c; c)$.

As composições em $\mathbb{W}\mathcal{P}$ são induzidas das composições \circ_i^1 de árvores métricas, conforme apêndice A, de acordo com a representação abaixo.



$$[T, x_3] \circ_2 [S, y_2] \mapsto [T \circ_2 S, x_1, x_2, y_1, y_2, x_3].$$

A verificação que as composições \circ_i^1 estão bem definidas nas classes de $\mathbb{W}\mathcal{P}$ é rotineira porém laboriosa.

Definiremos agora a transformação natural $\Upsilon : \mathbb{W} \rightarrow 1$.

Definição C.3.4. *Sejam \mathcal{P} uma operada topológica e $[T, x_k] \in \mathbb{W}(\mathcal{P})(c_n; c)$, definimos então*

$$\Upsilon_{\mathcal{P}}^{(c_n; c)} [T, x_k] := \varepsilon_{\mathcal{P}}^{(c_n; c)} (T, x_k)$$

onde consideramos $(T, x_k) \in \mathcal{F}^\bullet \mathcal{P}(c_n; c)$, esquecendo a estrutura métrica de T e ε é a counidade da adjunção $\mathcal{F}^\bullet \dashv \mathcal{U}^\bullet$.

Temos também uma transformação natural $\Lambda : \mathcal{F}^\bullet \mathcal{U}^\bullet \rightarrow \mathbb{W}$ definida como segue.

Definição C.3.5. *Sejam \mathcal{P} uma operada topológica e $(T, x_k) \in \mathcal{F}^\bullet \mathcal{P}(c_n; c)$. Seja T' a árvore métrica obtida decretando comprimento 1 a todas as arestas internas de T, assim $(T', x_k) \in \mathcal{P}^\sharp(c_n; c)$. Definimos então*

$$\Lambda_{\mathcal{P}}^{(c_n; c)} (T, x_k) := [T', x_k].$$

Note que por contrução Υ e Λ fatoram a counidade $\varepsilon : \mathcal{F}^\bullet \mathcal{U}^\bullet \rightarrow 1$:

$$\varepsilon = \Upsilon \circ \Lambda.$$

Lembremos que uma operada topológica \mathcal{P} é dita ser Σ -cofibrante se cada espaço $\mathcal{P}(c_n; c)$ é cofibrante (em top) e é dita ser bem pontuada se as inclusões $u_c \hookrightarrow \mathcal{P}(c; c)$ são cofibrações (em top) para cada $c \in \underline{C}$.

O principal resultado envolvendo a \mathbb{W} -construção topológica é o teorema abaixo, um caso particular do Teorema 3.5 de [5], e este a versão colorida do Teorema 5.1 de [6].

Teorema C.3.6. *Seja \mathcal{P} uma operada topológica. Se \mathcal{P} é Σ -cofibrante e bem pontuada então $(\mathbb{W}\mathcal{P}, \Upsilon_{\mathcal{P}} : \mathbb{W}\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P})$ é uma resolução cofibrante de \mathcal{P} .*

Em particular, $\Upsilon_{\mathcal{P}}^{(c_n; c)} : \mathbb{W}\mathcal{P}(c_n; c) \rightarrow \mathcal{P}(c_n; c)$ são equivalências homotópicas fracas para cada $(c_n; c) \in \underline{C}$.

Também se mostra que sob as hipóteses anteriores a operada livre $\mathcal{F}\bullet\mathcal{U}\bullet\mathcal{P}$ é cofibrante e $\Lambda_{\mathcal{P}}$ é uma cofibração (em $\text{Op}(\text{top})$).

$$\mathcal{F}\bullet\mathcal{U}\bullet\mathcal{P} \xrightarrow[\Lambda_{\mathcal{P}}]{\hookrightarrow} \mathbb{W}\mathcal{P} \xrightarrow[\Upsilon_{\mathcal{P}}]{\sim} \mathcal{P}$$

C.4 Um morfismo entre $\mathbb{W}\text{Act}$ e Act_{∞}

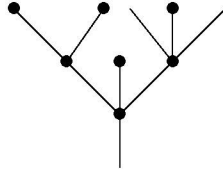
Daremos agora uma construção explícita de um morfismo de operadas

$$\xi : \mathbb{W}\text{Act} \rightarrow \text{Act}_{\infty},$$

cujas existência foi provada na primeira seção do capítulo 3 e usada nos resultados de comparações de retificações.

Essencialmente precisamos apenas construir um morfismo de operadas entre $\mathbb{W}\text{As}$ e As_{∞} e ele se estende naturalmente a um morfismo de operadas entre $\mathbb{W}\text{Act}$ e Act_{∞} . Escrevamos $\mathcal{T} := \coprod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$.

Definição C.4.1. *Sejam $\tau \in \mathcal{T}$ e e uma aresta interna de τ . Dizemos que e é degenerada se não existir um caminho entre a raiz e uma folha de τ contendo e ou se τ não tem folhas. Por exemplo, a árvore abaixo tem apenas uma aresta não degenerada.*

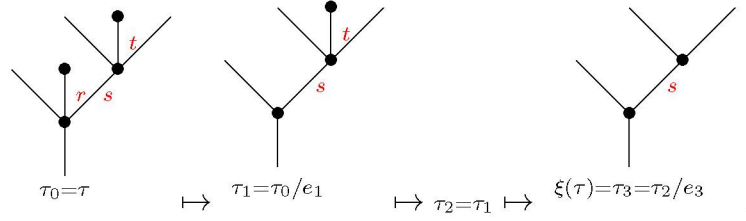


Lembremos que se τ é uma árvore métrica e e é uma aresta interna de τ , então τ/e é a árvore métrica obtida de τ excluindo e e identificando seus vértices.

Definição C.4.2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja*

$$\xi_n : \mathbb{W}_n \rightarrow \mathbb{K}_n$$

a aplicação definida como segue: seja $\{e_1, \dots, e_{|\tau|}\}$ o conjunto de arestas internas de τ (ordenado pela estrutura planar de τ). Sejam $\tau_0 := \tau$ e $\tau_i := \tau_{i-1}/e_i$ se e_i é degenerada ou $\tau_i := \tau_{i-1}$ caso contrário, para cada $1 \leq i \leq |\tau|$. Definimos então $\xi(\tau) := \tau_{|\tau|}$.



A verificação que $\xi_n(\tau)$ não depende da classe de τ em \mathbb{W}_n é rotineira porém laboriosa.

Observação C.4.3. Consideremos a notação da definição anterior e notemos que:

- (a) Se τ não tem frutos então $\xi_n(\tau) = \tau$;
- (b) Para qualquer $\tau \in \mathbb{W}_0$, $\xi_0(\tau) = \delta_0$;
- (c) ξ_n não altera o número de folhas de τ ;
- (d) A definição de aresta degenerada assegura que $\xi_n(\tau)$ não tem frutos (para $n \geq 1$).

Segue então destas observações que $\xi_n(\tau)$ está bem definida.

Proposição C.4.4. A aplicação

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{W} &\rightarrow \text{As}_\infty \\ \xi &:= (\xi_n : \mathbb{W}_n \rightarrow \mathbb{K}_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

é um morfismo de operadas.

Demonstração. Sejam $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$, $m \geq 0$, $\tau \in \mathbb{W}_n$ e $\varsigma \in \mathbb{K}_m$. Seja e uma aresta interna de τ e e' uma aresta interna de ς . Nós assumimos as seguintes duas afirmações, que podem ser verificadas via argumentos usuais de teoria de grafos:

- (1) e é degenerada em $\tau \circ_i \varsigma$ se, e somente se e é degenerada em τ . O mesmo vale para e' com respeito a ς ;

(2)

$$(\tau \circ \varsigma) / e = (\tau / e) \circ_i \varsigma$$

e

$$(\tau \circ \varsigma) / e' = \tau \circ_i (\varsigma / e').$$

Agora consideramos dois casos.

- (a) Supponhamos que $m \geq 1$. Neste caso, a aresta interna criada em $\tau \circ_i \varsigma$, digamos e'' , não é degenerada, porque existe um caminho da raiz de τ à sua i -ésima folha e um caminho da raiz de ς à qualquer uma de suas folhas. Desde que a composição em As_∞ coincide com a composição em $\mathbb{W}\text{As}$ quando ς tem ao menos uma folha, então segue de (1) e (2) que contrair as arestas degeneradas de $\tau \circ_i \varsigma$ é o mesmo que contrair as arestas degeneradas de τ , contrair as arestas degeneradas de ς e enxertá-la no i -ésimo galho de τ , isto é, $\xi_{n+m-1}(\tau \circ_i \varsigma) = \xi_n(\tau) \circ_i \xi_m(\varsigma)$.

(b) Suponhamos que $m = 0$. Neste caso e'' é degenerada desde que ς não tem folhas, e então segue de (1) e (2) que contrair as arestas degeneradas de $\tau \circ_i \varsigma$ é o mesmo que contrair as arestas degeneradas de τ , contrair todas as arestas internas de ς e contrair e'' , mas isso é o mesmo que contrair as arestas degeneradas de τ e excluir seu i -ésimo galho, isto é, $\xi_{n-1}(\tau \circ_i \varsigma) = \xi_n(\tau) \circ \delta_0 = \xi_n(\tau) \circ_i \xi_0(\varsigma)$. Uma demonstração mais rigorosa pode ser dada por indução. \square

Corolário C.4.5. *O morfismo de operadas $\xi : \mathbb{W} \rightarrow \text{As}_\infty$ induz um morfismo de operadas $\xi : \mathbb{W}\text{Act} \rightarrow \text{Act}_\infty$.*

Demonstração. Notemos que $\mathbb{W}\text{Act}$ (respectivamente Act_∞) é definida em termos de $\mathbb{W}\text{As}$ (respectivamente As_∞), assim como suas composições. \square

Corolário C.4.6. *Existe uma adjunção extensão-restrição entre $\text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act})$ e $\text{Alg}(\text{Act}_\infty)$.*

$$\xi_! : \text{Alg}(\mathbb{W}\text{Act}) \rightleftarrows \text{Alg}(\text{Act}_\infty) : \xi^*.$$

Em particular, toda A_∞ -ação tem uma estrutura natural de h -ação (com os mesmos espaços subjacentes).

Referências Bibliográficas

- [1] J.F. Adams, *On the cobar construction*, Proc Nat. Acad. Sci. USA 42 (1956), 409-412.
- [2] J.F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. (2) 72 (1960), 20-104.
- [3] D.W. Anderson, *Fibrations and geometric realizations*, Bull. Amer. Math. Soc., 84(5):765-788, 1978.
- [4] C. Berger and I. Moerdjik, *Axiomatic homotopy theory for operads*, Comment. Math. Helv. 78 (2003), no. 4, 805-831.
- [5] C. Berger and I. Moerdjik, *Resolution of coloured operads and rectification of homotopy algebras*, Categories in algebra, geometry and mathematical physics, Contemp. Math., vol. 431, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 31-58.
- [6] C. Berger and I. Moerdjik, *The Boardman-Vogt resolution of operads in monoidal model categories*, Topology 45 (2006), no. 5, 807-849.
- [7] J.M. Boardman and R.M. Vogt, *Homotopy-everything H-spaces*. Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), no. 6, 1117-1122.
- [8] J.M. Boardman and R.M. Vogt, *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 347, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [9] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra 1. Basic category theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 50, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [10] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 2. Categories and Structures*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 51. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [11] M. Cole, *Mixing model structures*, Topology Appl. 153 no. 7 (2006), 1016-1032.
- [12] T. tom Dieck, *Algebraic topology*, EMS Textbooks in Mathematics, EMS Publishing House, 2008.
- [13] A. Dold and R. Lashof, *Principal quasifibrations and fibre homotopy equivalence of bundles*, Illinois J. Math. 3 (1959), no. 2, 285-305.
- [14] D. Dugger and B. Shipley, *A curious example of triangulated-equivalent model categories which are not Quillen equivalent*, Algebraic & Geometric Topology 9 (2009).

- [15] W.G. Dwyer and J. Spalinski, *Homotopy theories and model categories*, Handbook of algebraic topology, North-Holland, Amsterdam, 1995, 73-126.
- [16] A.D. Elmendorf and M.A. Mandell, *Rings, modules, and algebras in infinite loop space theory*, Adv. Math. 205 (2006), 163-228.
- [17] Y. Felix, S. Halperin and J.-C. Thomas, *Adams' cobar equivalence*, Trans. Amer. Math. Soc. 329 (1992), 531-549.
- [18] B. Fresse, *Modules over operads and functors*, Lecture Notes in Mathematics 1967, Springer Verlag, 2009, 318 pages.
- [19] B. Fresse, *Props in model categories and homotopy invariance of structures*, Georgian Math. J. 17 (2010), 79-160.
- [20] M. Fuchs, *A modified Dold-Lashof construction that does classify H -principal fibrations*, Math. Annalen 192 (1971), 328-340.
- [21] A.G. Hamilton, *Numbers, sets, and axioms: the apparatus of mathematics*, New York: Cambridge University Press, 1982.
- [22] T. Haraguchi, *On model structure for coreflexive subcategories of a model category*, Math. J. Okayama Univ. 57 (2015), 79-84.
- [23] J.E. Harper, *Homotopy theory of modules over operads and non- Σ operads in monoidal model categories*, J. Pure Appl. Algebra 214 (2010), no. 8, 1407-1434.
- [24] P.S. Hirschhorn, *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [25] P.S. Hirschhorn. *The Quillen model category of topological spaces*, ArXiv e-prints, [1508.01942](#) (2015).
- [26] E. Hoefel, M. Livernet, and J. Stasheff, *A_∞ -actions and recognition of relative loop spaces*, Topology and its Applications, v. 206, p. 126-147, 2016.
- [27] M. Hovey, *Quillen model categories*, Journal of K-theory 11 (2013), 469-478.
- [28] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [29] M. Hovey, *Monoidal model categories*, ArXiv e-prints, [9803002](#) (1998).
- [30] N. Iwase and M. Mimura, *Higher homotopy structures*, Algebraic topology, Proc. Int. Conf., Arcata/Calif. 1986, Lect. Notes Math. 1370, 193-220 (1989).
- [31] I.M. James, *Reduced product spaces*, Ann. of Math. (2) 62 (1955), 170-197.
- [32] A. Joyal and M. Tierney, *Strong stacks and classifying spaces*, In Category Theory, Proc. Int. Conf., Como/Italy 1990, number 1488 in Lect. Notes Math. (1991), 213-236.

- [33] T. Leinster, *Higher operads, higher categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series 298, Cambridge University Press, 2004.
- [34] S. MacLane, *Categorical algebra*, Bull. Amer. Math. Soc, (71) 40-106, 1965.
- [35] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [36] M. Markl, *Operads and PROPs*, Handbook of algebra, vol. 5, p.87-140, Elsevier, 2008.
- [37] M. Markl, *Models for operads*, Comm. Algebra 24 (1996), 1471-1500.
- [38] M. Markl, S. Shnider, and J. Stasheff, *Operads in algebra, topology and physics*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 96, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [39] J.P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Lect. Notes Math. 271 (1972).
- [40] J.P. May and K. Ponto, *More concise algebraic topology: Localization, completion, and model categories*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 2012.
- [41] J. McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- [42] J. Milnor, *Construction of universal bundles II*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 63, no. 3 (May, 1956), 430-436.
- [43] J. Milnor, *Morse theory* Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965), no. 1, 136-137.
- [44] I. Moerdijk and B. Toën, *Simplicial methods for operads and algebraic geometry*. Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2010.
- [45] F. Muro, *Homotopy units in A-infinity algebras*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc., 2015.
- [46] F. Muro, *Homotopy theory of nonsymmetric operads*, Algebr. Geom. Topol. 11.3 (2011), 1541-1599.
- [47] F. Muro and A. Tonks, *Unital associahedra*, Forum Math. 26 (2014) no. 2, 593-620.
- [48] R.A. Nowlan, *A_n -actions on fibre spaces*, Math. J. Indiana Univ., 21:285-313, 1971.
- [49] D.G. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Math., vol. 43, Springer-Verlag, 1967.
- [50] G. Raptis, *Homotopy theory of posets*, Homology, Homotopy and Applications, vol. 12 no. 2 (2010), 211-230.
- [51] C. Rezk, *Spaces of algebra structures and cohomology of operads*, PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1996.

- [52] H. Samelson, *Groups and spaces of loops*, Comment. Math. Helv., 28, 278-287 (1954).
- [53] J.F. Slifker, *Exotic multiplications on S^3* , Quart. J. Math.Oxford (2), 16 (1965) 322-359.
- [54] J.D. Stasheff, *Differential graded Lie algebras, quasi-Hopf algebras and higher homotopy algebras*, Quantum groups 1510, Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1992.
- [55] J.D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275-292; *ibid.* 108 (1963), 293-312.
- [56] J.D. Stasheff, *H-spaces from a homotopy point of view*, Lecture Notes in Math., vol. 161, Springer-Verlag, 1970.
- [57] N.E. Steenrod, *A convenient category of topological sapces*, Michigan Math. J. 14 (1967), 133-152.
- [58] N. Strickland, *The category of CGWH spaces*, [Preprint](#), 2009.
- [59] A. Strøm, *The homotopy category is a homotopy category*, Arch. Math. 22 (1972), 435-441.
- [60] M. Sugawara, *A condition that a space is group-like*, Math. J. Okayama Univ. 7 (1957), 123-149.
- [61] K. Tanaka, *A model structure on the catehory of small categories for coverings*, Math. J. Okayama Univ. 55 (2013), 95-116.
- [62] R.W. Thomason, *Cat as a closed model category*, Cahiers Topologie Gom. Différentielle 21, no. 3 (1980), 305-324.
- [63] R.M. Vogt, *Cofibrant operads and universal E_∞ operads*. Topology Appl., 133(1): 69-87, 2003.
- [64] R.M. Vogt, *Convenient categories of topological spaces for homotopy theory*, Arch. Math. (Basel) 22 (1971), 545-555.